Министерство образования и науки Российской Федерации

Байкальский государственный университет

Г.В. Сидоренко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

(производственные функции и модель Леонтьева)

Учебное пособие

Иркутск

Издательство БГУ

2016

УДК 512.64(075.8)

ББК 22.143я7

С34

Печатается по решению редакционно-издательского совета Байкальского государственного университета

Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент И.А. Никифорова

к.ф.-м.н., доцент С.В. Тимофеев

С34 Сидоренко Г.В. Математическая экономика (производственные функции и модель Леонтьева) [Электронный ресурс] : учеб. пособие/ Г.В. Сидоренко. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2016.–115 с.– Режим доступа: http://lib-catalog.isea.ru.

Учебное пособие содержит углублённое изложение ряда экономических моделей, в частности модели Леонтьева и моделей на основе производственных функций.

Рекомендуется для студентов и аспирантов экономических специальностей всех форм обучения, а также для специалистов – экономистов, использующих математические методы в своей работе.

УДК 512.64(075.8)

ББК 22.143я7

ПРЕДИСЛОВИЕ

На первоначальном этапе развития экономической науки применение математических методов, за исключением, быть может, тривиальных расчетов, было довольно редким явлением. Предлагаемые в то время экономические модели и методы их исследования выражались, как правило, в словесной или табличной форме. Однако с течением времени выяснилось, что многие идеи экономистов тех лет допускают строгую математическую формализацию. Более того, это оказалось совершенно не случайно. По мере развития экономической науки присущие ей внутренне математические черты постепенно проявлялись все сильнее. В итоге это привело к тому, что некоторые экономисты и математики стали предлагать даже полную математизацию экономической теории, проводя аналогии с физикой и механикой.

Первая систематически сформулированная математическая теория общего экономического равновесия была выдвинута Леоном Вальрасом в 70–х годах XIX века. Он перевел на математический язык, усовершенствовал, уточнил и включил в нее многое из того, что создали ранее классики современной экономической науки Адам Смит, Давид Рикардо, Томас Роберт Мальтус, Джон Стюарт Милль. Отметим, что при этом Вальрас использовал ряд важных понятий, таких, например, как функции спроса и предложения, которые уже были введены и изложены в математической форме экономистами О.Курно, Д.Бернулли, Е.Дж.Дюпюи и другими. Вскоре Вильфредо Парето и его последователи усовершенствовали и расширили вальрасовскую модель, и на сей день теория общего равновесия является основой экономического образования.

Эта теория основана на том, что между соответствующими величинами в экономике существует не односторонняя причинно– следственная связь, а многосторонняя взаимозависимость, которую математически можно представить некоторой системой соотношений между этими величинами. Большой заслугой Вальраса является не только общепризнанная ныне идея о возможности функционального описания экономических явлений системами уравнений, неравенств и включений, но и сам пример математического подхода к экономике. Вальрас не дал ни удовлетворительного доказательства существования решений в предложенных моделях, ни их математического обоснования. Причина этого, как ни странно, заключалась в недостаточном развитии в конце XIX века некоторых разделов математики. Лишь в середине XX века стало возможно обосновать модель Вальраса и исследовать ее важные свойства. Этот факт является одним из ярких примеров достижений экономической теории, обусловленных прогрессом математики. Отличительной чертой этих достижений является применение эффективных теоретических методов исследования, что явно отличается от простых механистических вычислений, свойственных первоначальному использованию математики в экономике. Эти достижения показали, что в экономической теории родилось новое направление – математическая школа. Поскольку моделью Вальраса применение методов математического моделирования в экономике дело не ограничивается, то это направление достаточно обширное. Поэтому термину „математическая экономика“ можно дать широкое определение – создание математических моделей экономических процессов и их теоретическое и численное исследование методами математического анализа.

В математическом подходе к экономическом явлениям можно выделить два направления. Одно составляют исследования детерминированных, нестохастических систем. Другое – статистических систем, приложений методов математической статистики к оценке экономических параметров. Как раз первое направление часто и называют математической экономикой, т.е. в более узком, чем говорилось выше, смысле. Второе направление по традиции называют эконометрикой. Математики – экономисты считают, что глубинные механизмы экономических явлений имеют детерминированную природу, хотя не обходится и без случайностей, которыми часто можно пренебречь. При этом можно строить и изучать такие модели, которые для непосредственной статистической проверки неудобны, либо для них статистика вообще отсутствует. Для экономико–математической теории центральным предметом исследования являются экономические соотношения во всей их полноте. Статистической проверкой этих теорий занимаются эконометристы, изучающие согласование количественных теоретических соотношений с эмпирическими данными экономической действительности.

Модели, рассматриваемые в математической экономике, можно условно разделить на три большие группы. Критерием такого деления служит степень агрегирования экономических показателей. Наибольшая степень агрегирования – когда модель экономики содержит всего лишь несколько предельно обобщенных показателей, например, национальный доход, общие затраты труда и капитала и т.д. Моделями такого типа, как правило, занимаются специалисты по макротеории. Модели среднего уровня агрегирования содержат от нескольких десятков до нескольких тысяч усредненных экономических показателей. Помимо теоретических целей, модели такого типа реально используются в экономике при прогнозировании, принятии решений и оценке результатов. Полностью дезагрегированные модели важны в первую очередь с теоретической точки зрения, как исследование и обоснование первопричин экономической деятельности и основ экономической теории. С точки же зрения математики дезагрегированные модели вальрасовского типа представляют, быть может, самый интересный объект для исследований. Еще раз подчеркнем всю условность деления моделей на указанные выше группы. Существует достаточно много моделей, содержащих переменные с различной степенью агрегирования, а также переменные, имеющие статистическую природу. В отдельную группу можно выделить частные модели, описывающие какой–нибудь экономический показатель и т.д.

Значительное число нобелевских премий по экономике получили либо математики, занимавшиеся приложением своих методов в экономике, либо экономисты, предложившие математические модели. Казалось бы, вот она – путеводная нить, ухватившись за которую, нужно идти семимильными шагами. К сожалению, это не всегда так. С точки зрения математики все обстоит хорошо – трудная задача, красивое решение, но, начиная с некоторого момента, получаемые результаты могут не иметь никакого отношения к экономической действительности. Слепое теоретизирование в прикладных науках почти всегда обречено на неудачу. Психология, экология, науки о земле, социология, демография, политология, инженерные и различные прикладные дисциплины, а также, конечно, математика – вот составные части фундамента, на котором строится здание экономической науки. Попытки построить его на одном, пусть даже фундаментальном камне, могут привести к неустойчивости всей конструкции. Безусловно, математика является мощным средством в экономике, но при практическом моделировании нужно всегда поддерживать связь с внешним миром.

Данное учебное пособие предназначено как для студентов младших курсов, изучающих начала математического моделирования в экономике в рамках общего курса математики, так и для старшекурсников и магистрантов, специализирующихся в математическом моделировании экономических процессов и работающих с математическими методами. Такая структура пособия сделана специально по ряду причин.

Первая. Как правило часы, выделяемые на изучение математического моделирования, столь незначительны, что многие вопросы, непосредственно примыкающие к стандартным, просто не рассматриваются. Хотя их важность при исследовании и оптимизации математических моделей экономики очевидна.

Вторая. Математическое образование студента, ограниченного курсом общей математики, таково, что если возникает, по каким – либо причинам, необходимость углубить свои познания, то ему подчас непонятно как это сделать. Общепринятые курсы высшей математики и содержат, как правило, изложение стандартных вопросов. Существующие же книги по различным разделам математики и математического моделирования написаны либо для математиков – профессионалов, либо для математиков – студентов, имеющих более глубокую математическую подготовку и способность в ориентироваться в специальной литературе.

Отсюда вытекает и цель, которую преследовал автор. Показать, как применяются методы математики при исследовании экономико-математических моделей. Замечу, что некоторые важные вопросы, рассмотренные в пособии, иногда непросто найти самостоятельно.

В силу указанных выше причин, в данном учебном пособии широко используются понятия, которые предполагаются известными из стандартных общематематических курсов. Это, с одной стороны, начальные понятия линейной алгебры и анализа – вектор, матрица, предел, производная, операции над ними и т.д., с другой – ряд свойств задачи линейного программирования.

Содержание учебного пособия вполне конкретно отражено в оглавлении к нему. Список литературы содержит те книги, которые непосредственно использовались в работе над пособием, а также книги, расширяющие и углубляющие содержание вопросов, рассмотренных в пособии.

Глава 1

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1.1 Понятие производственной функции

Экономика моделируется при помощи сравнительно небольшого числа агрегированных показателей. Пусть выпускается m типов продуктов. $y_i,\ i = \overline{1,m}$ – выпуск продукта i. Для производства продуктов необходимо использование рабочей силы, основных и оборотных фондов, природных ресурсов, сырья и т.д. Будем называть эти величины ресурсами. Пусть x_j – количество ресурса $j,\ j = \overline{1,n}$. Единицы измерения $y_i,\ x_j$ в каждом конкретном случае могут быть свои (натуральная, денежная форма и т.д.).

Производственной функцией в широком смысле называется соотношение между используемыми ресурсами и выпуском продукции.

$$F(y, x, a) = 0, \tag{1.1}$$

где $a \in R^p$ – вектор параметров. Соотношение (1.1) может быть и векторным. Задается оно, как правило, либо аналитически, либо в виде таблицы. Вид функции $F(y, x, a)$ и значения параметров $a \in R^p$ определяются из экономических или технологических соображений, а также путем обработки статистической информации.

Вместо общего представления производственной функции в виде (1.1) часто используют его частные случаи:

1) $y = f(x, a)$ – функция выпуска, в которой в качестве независимых переменных берутся затраты ресурсов и параметры;

2) $x = h(y, a)$ – функция затрат, где независимые переменные есть выпуск и параметры.

Как правило, соотношение $y = f(x, a)$ и называют производственной функцией (в узком смысле).

Возникновение теории производственных функций связывают с появлением в 1928 году статьи П.Дугласа и Д.Кобба "Теория производства" (хотя сама идея такого подхода имеет более ранние корни). Авторы предприняли попытку определить эмпирическим путем влияние величины затрачиваемого капитала K и труда L на объем выпускаемой продукции Y в обрабатывающей промышленности США. Были поставлены следующие задачи:

1) определить параметрический класс функций, наиболее точно приближающий количественные соотношения между тремя выбранными характеристиками производства;

2) найти числовые параметры, задающие конкретную функцию этого класса;

3) сравнить полученные результаты с фактическими данными.

Предложенный П.Дугласом и Д.Коббом параметрический класс функций $Y = AK^\alpha L^\beta$, где $A \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ оказался весьма плодотворным. С тех пор производственные функции подобного вида стандартно называются производственными функциями Кобба-Дугласа. Обработка статистической информации позволила определить конкретные значения параметров A, α, β и построить функцию Кобба-Дугласа, хорошо моделирующую процесс производства.

В соотношении (1.1) переменные y, x, a имеют, соответственно, размерности m, n, p. В рассмотренной выше функции Кобба-Дугласа $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$. Поэтому в дальнейшем при изложении свойств и построении производственных функций размерности переменных y, x, a будем выбирать подходящими для каждого конкретного случая, что позволит сохранить достаточную общность, не усложняя обозначений.

1.2 Основные экономико - математические характеристики производственных функций

Для введения основных экономико–математических характеристик производственных функций рассмотрим двухфакторную $(n = 2,\ m = 1)$ производственную функцию. Пусть K – объем основных фондов в стоимостном или количественном выражении, L – числовое выражение объема трудовых ресурсов (число рабочих, число человеко-дней или часов и т.д.), Y – объем выпущенной продукции в стоимостном или натуральном выражении. Тогда, опуская запись параметров $a \in R^p$ в качестве аргументов производственной функции, получаем

$$Y = F(K, L).$$

Часто выдвигают скорее математическое, нежели экономическое ограничение на класс функций $F(\cdot)$, а именно, их предполагают дважды непрерывно дифференцируемыми при $K > 0$, $L > 0$ (впрочем, нам встретятся отдельные примеры производственных функций, где это предположение не выполняется). Следующие ограничения на класс функций $F(\cdot)$ допускают экономическую интерпретацию.

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0. \tag{1.2}$$

При отсутствии хотя бы одного ресурса производство невозможно.

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0, \quad K > 0, \quad L > 0. \tag{1.3}$$

При увеличении объема одного из ресурсов при неизменном объеме другого выпуск продукции возрастает.

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0, \quad K > 0, \quad L > 0. \tag{1.4}$$

При фиксированном одном ресурсе последовательное увеличение другого приводит ко все меньшим приростам произведенного продукта.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \quad \lambda > 0 \tag{1.5}$$

Математически – линейная однородность. Экономически – независимость от масштаба производства, т.е. выпуск растет пропорционально росту ресурсов.

Соотношения (1.2)–(1.5) являются основными предположениями, накладываемыми на класс производственных функций. Если отказаться от требования дифференцируемости, то вместо условий (1.3), (1.4) требуют монотонности и вогнутости функции $F(K, L)$ по каждому аргументу. Укажем некоторые свойства функций $F(K, L)$, вытекающие из (1.2) – (1.5).

1) $F(K, L)$ суперлинейна, т.е.

$$F(K_1 + K_2, L_1 + L_2) \geq F(K_1, L_1) + F(K_2, L_2).$$

2) $F(K,L)$ возрастает, т.е. если $K_1 \geq K_2,\ L_1 \geq L_2$, то $F(K_1,L_1) \geq F(K_2,L_2)$.

3) Если $K > 0,\ L > 0$, то $F(K,L) > 0$.

4) $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$, $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ положительно однородны нулевой степени, т.е. при $\lambda > 0$ имеем:

$$\frac{\partial F(\lambda K,\lambda L)}{\partial K} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K},\quad \frac{\partial F(\lambda K,\lambda L)}{\partial L} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}.$$

5) $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2}$, $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2}$, $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K \partial L}$, положительно однородны степени (-1), т.е., например,

$$\frac{\partial^2 F(\lambda K,\lambda L)}{\partial K^2} = \lambda^{-1}\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2}$$

и т.д., $\lambda > 0$.

6) $F(K,L) = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}K + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}L,\ \ K > 0,\ \ L > 0$

(теорема Эйлера об однородных функциях).

Последнему соотношению можно придать следующий смысл. Пусть ω_1 – средняя ставка заработной платы, ω_2 – норма прибыли. Тогда доход трудовых ресурсов равен $L\omega_1$, доход предпринимателя равен $K\omega_2$. В условиях совершенной конкуренции общая занятость рабочей силы и заработная плата связаны соотношением $\frac{\partial F}{\partial L} = \omega_1$. Тогда, если весь произведенный продукт делится на доход трудовых ресурсов и прибыль предпринимателя, то $\frac{\partial F}{\partial K} = \omega_2$. Ниже будет дана несколько другая интерпретация величин $\frac{\partial F}{\partial L}$, $\frac{\partial F}{\partial K}$.

Введем основные экономико–математические характеристики производственных функций:

1) $y = Y/L$ – средняя производительность труда;

2) $z = Y/K$ – средняя фондоотдача;

3) $k = K/L$ – фондовооруженность;

4) $v = \partial F \partial L$ – предельная производительность труда;

5) $r = \partial F/\partial K$ – предельная фондоотдача;

6) $\alpha = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}$ – коэффициент эластичности по фондам;

7) $\beta = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}$ – коэффициент эластичности по труду.

Прокомментируем ряд введенных коэффициентов. Предельная производительность труда v характеризует величину дополнительного эффекта от каждой дополнительной единицы затраченного труда в точке (K, L). Из (1.4) следует, что при неизменных основных фондах K при увеличении затрат трудовых ресурсов предельная производительность труда v, как и средняя y, падают. Отметим, что для функции Кобба-Дугласа $v = \beta y$. Так как $0 \leq \beta \leq 1$, то предельная производительность труда всегда не больше средней.

Коэффициент эластичности по фондам α показывает, на сколько процентов увеличится объем выпущенной продукции при увеличении объема основных фондов на 1% при неизменных трудовых ресурсах. Аналогичный смысл имеет коэффициент β. Для функции Кобба-Дугласа, и в этом легко убедиться, ее параметры α, β и являются коэффициентами эластичности. В данном случае они не зависят от точки (K, L) – значений факторов.

Производственная функция $F(K, L)$ обладает тем свойством, что одно и то же количество продукта Y_c может быть произведено при различных сочетаниях ресурсов K и L. Геометрическое место точек на плоскости (K, L), для которых $F(K, L) = Y_c$, называется изоквантой. Луч, проведенный из начала координат, пересекает изокванту $F(K, L) = Y_c$ в некоторой точке (K^*, L^*). Тогда из (1.5) следует, что в точках луча, лежащих ближе к началу координат, чем точка (K^*, L^*), имеем $F(K, L) = Y < Y_c$, а в точках, лежащих дальше, чем (K^*, L^*), имеем

$Y > Y_c$. Изокванта $F(K,L) = Y_c$ разделяет точки плоскости (K,L) на два множества, для одного из которых $F(K,L) < Y_c$, а для другого $F(K,L) > Y_c$.

Изокванту, задаваемую соотношением

$$F(K,L) = Y_c, \tag{1.6}$$

можно рассматривать как график зависимости либо $K(L)$, либо $L(K)$. Беря полный дифференциал от обеих частей соотношения (1.6), получим

$$dY_c = \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial L}dL = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}, \quad \frac{dL}{dK} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}}.$$

Из соотношений (1.3) следует, что $\frac{dK}{dL} < 0$, $\frac{dL}{dK} < 0$. Величины $S_K = -\frac{dK}{dL}$, $S_L = -\frac{dL}{dK}$ называются предельными нормами замены трудовых ресурсов L основными фондами K и основных фондов K трудовыми ресурсами L, соответственно. Величина S_K показывает, на сколько должны измениться основные фонды K при изменении затрат трудовых ресурсов L на единицу, чтобы выпуск остался постоянным. Показатель S_L имеет аналогичный смысл. Очевидно, $S_K S_L = 1$.

Отметим, что показатели S_K, S_L не остаются постоянными вдоль изокванты (1.6). Для количественной характеристики скорости изменения предельных норм замены используют величины σ_K, σ_L, называемые эластичностью замены ресурсов. Они показывают, на сколько процентов должно измениться отношение основных фондов к трудовым ресурсам (или трудовых ресурсов к основным фондам) при движении вдоль изокванты (1.6), чтобы при этом предельная норма замены S_K (или S_L) изменилась на 1 процент.

$$\sigma_K = \left(\frac{dS_K}{d(K/L)} \cdot \frac{K/L}{S_K} \right)^{-1}, \quad \sigma_L = \left(\frac{dS_L}{d(L/K)} \cdot \frac{L/K}{S_L} \right)^{-1}.$$

Можно убедиться, что $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$.

Конечно, для характеристики скорости изменения наклона касательной к изокванте при движении вдоль кривой можно было бы использовать более простой показатель, но эластичность замены предпочитается в связи с тем, что у нее есть большое преимущество – она постоянна для большинства используемых на практике производственных функций, т.е. не только не изменяется при движении вдоль некоторой изокванты, но и не зависит от выбора изокванты. Отметим, что для функции Кобба–Дугласа эластичность замены $\sigma = 1$.

Вообще говоря, соответственно характеру поведения показателя эластичности замены различают два класса производственных функций: VES – функции с переменной эластичностью замены и CES – функции с постоянной эластичностью замены. Отыскание этих функций сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{dS}{d(K/L)} \frac{K/L}{S} = \sigma^{-1}. \tag{1.7}$$

Для CES – функций, т.е. σ – заданная константа, это уравнение сравнительно просто разрешается. Выбирая подходящим образом произвольные постоянные, возникающие при решении дифференциального уравнения, общее решение уравнения (1.7) можно записать в виде:

$$Y = F(K, L) = A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{1.8}$$

где $A > 0$, $0 < \delta < 1$, $\rho > -1$, $\rho = (1-\sigma)/\sigma$. Соотношение (1.8) есть стандартная форма записи CES – функции. Отметим, что оно годится для $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$. При $\sigma = 1$ решение уравнения (1.7) есть функция Кобба-Дугласа. При $\sigma = 0$, переходя к пределу в (1.8) при $\rho \to \infty$ ($\sigma \to 0$), получаем $Y = \min\{K, L\}$. Часто эту функцию записывают в виде

$$Y = F_\infty(K, L) = \min\{aK, bL\} \tag{1.9}$$

где a, b имеют смысл фондоотдачи и производительности труда, и называют производственной функцией с постоянными пропорциями (с нулевой эластичностью замены). Часто - функцией Леонтьева. Равенство $\sigma = 0$ означает отсутствие замещения ресурсов и при $K \neq L$ полностью используется ресурс, имеющийся в минимальном количестве, а второй ресурс используется не полностью.

Изучение однородных производственных функций $Y = F(K, L)$ удобно проводить с помощью функции одной переменной вида $y = f(k) = F(k, 1)$, где, напомним, $k = K/L$ – средняя фондовооруженность, y – средняя производительность труда.

Стандартные предположения, накладываемые на производственные функции, для функции переменной k - фондовооружённости, выглядят следующим образом:

$$f(k) > 0, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} f(k) = +\infty,$$

$$f'(k) > 0, \quad \lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0, \quad \lim_{k \to 0} f'(k) = +\infty, \quad f''(k) < 0.$$

Тогда остальные экономико–математические характеристики линейно–однородных производственных функций можно записать в виде:

$v = f - kf'$ – предельная производительность труда;

$r = f'$ – предельная фондоотдача;

$\alpha = k\dfrac{f'}{f}$ – коэффициент эластичности по фондам;

$\beta = 1 - k\dfrac{f'}{f}$ – коэффициент эластичности по трудовым ресурсам;

$S_K = \dfrac{f}{f'} - k$ – предельная норма замены трудовых ресурсов L основными фондами K;

$S_L = \dfrac{f'}{f - kf'}$ – предельная норма замены основных фондов K трудовыми ресурсами L;

$\sigma = -\dfrac{f'(f - kf')}{kff''}$ – эластичность замены ресурсов.

На самом деле:

$$v = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{\partial (LF(\frac{K}{L},1))}{\partial L} =$$

$$= F(\frac{K}{L},1) - LKL^{-2}F'(\frac{K}{L},1) = f(k) - kf'(k).$$

$$r = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \frac{\partial (LF(\frac{K}{L},1))}{\partial K} = LL^{-1}F'(\frac{K}{L},1) = f'(k).$$

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y} = f'(k)\frac{K}{LF(\frac{K}{L},1)} = k\frac{f'(k)}{f(k)}.$$

$$S_K = \frac{\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}}{\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}} = \frac{v}{r} = \frac{f(k) - kf'(k)}{f'(k)} = \frac{f(k)}{f'(k)} - k.$$

$$S_L = \frac{\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}}{\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}} = \frac{r}{v} = \frac{f'(k)}{f(k) - kf'(k)}.$$

$$\sigma_K = [\frac{dS_K}{dk}\frac{k}{S_K}]^{-1} = [(\frac{(f'(k))^2 - f(k)f''(k)}{(f'(k))^2} - 1)\frac{k}{\frac{f(k)}{f'(k)} - k}]^{-1} =$$

$$= [\frac{-f(k)f''(k)}{(f'(k))^2}\frac{kf'(k)}{f(k) - kf'(k)}]^{-1} = [\frac{-f(k)f''(k)k}{f'(k)(f(k) - kf'(k))}]^{-1} =$$

$$= -\frac{f'(k)(f(k) - kf'(k))}{kf(k)f''(k)}.$$

$$\sigma_L = [\frac{dS_L}{d(k^{-1})}\frac{k^{-1}}{S_L}]^{-1} = [-\frac{dS_L}{dk}\frac{k}{S_L}]^{-1} = -\frac{S_L}{k}[\frac{dS_L}{k}]^{-1} =$$

$$= -\frac{f'}{k(f-kf')}\frac{(f-kf')^2}{ff''} = -\frac{f'(k)(f(k)-kf'(k))}{kf(k)f''(k)}.$$

Отсюда, кстати, и вытекает, $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$.

Встречавшиеся выше производственные функции можно, используя переменную k, записать в виде:

$f_{KD}(k) = Ak^{\alpha}$ – функция Кобба-Дугласа;

$f_{CES}(k) = A(k^{-\rho} + C)^{-\frac{1}{\rho}}$ – CES– функция (или, что то же самое,

$f_{CES}(k) = A(\delta k^{-\rho} + (1-\delta))^{-\frac{1}{\rho}}$);

$f_{\infty}(k) = A\min(k, 1)$ – функция с постоянными пропорциями.

Убедимся, что для функции Кобба - Дугласа эластичность замены факторов, как и указывалось выше, равна единице.

$$\sigma_{KD} = -\frac{A\alpha k^{\alpha-1}(Ak^{\alpha} - k\alpha Ak^{\alpha-1})}{kAk^{\alpha}A\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}} = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} = 1.$$

Получим, используя переменную k, указанное представление для CES - функции. Формально, для этого требуется решить дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\sigma = -\frac{f'(k)(f(k)-kf'(k))}{kf(k)f''(k)}.$$

При этом сразу находится функция $f(k)$, но данное уравнение нелинейно. Поэтому решим его поэтапно, используя введённые характеристики производственных функций, а именно предельную норму замены:

$$\frac{dS}{dk}\frac{k}{S} = \sigma^{-1}.$$

Это уравнение линейно относительно S:

$$\frac{dS}{dk} = \sigma^{-1}\frac{S}{k}.$$

Его решение:

$$S(k) = C_1 k^{\frac{1}{\sigma}}, \quad C_1 = \mathrm{const}.$$

Используя представление предельной нормы замены трудовых ресурсов L основными фондами K, получим:

$$\frac{f(k)}{f'(k)} - k = C_1 k^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Это уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделим их

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{1}{k + C_1 k^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

и проинтегрируем:

$$\ln f = \int \frac{dk}{k + C_1 k^{\frac{1}{\sigma}}} = I.$$

Сделаем замену переменной:

$$t = k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}, \quad k = t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad dk = \frac{\sigma}{\sigma-1} t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dt = \frac{\sigma}{\sigma-1} t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} dt.$$

Тогда интеграл I примет вид:

$$I = \frac{\sigma}{\sigma-1}\int \frac{t^{\frac{1}{\sigma-1}}dt}{t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + C_1 t^{\frac{1}{\sigma-1}}} = \frac{\sigma}{\sigma-1}\int \frac{dt}{t + C_1} =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma-1}\ln|t + C_1| + C_2 = \frac{\sigma}{\sigma-1}\ln|k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C_1| + C_2,$$

$C_2 = \mathrm{const}.$

Отсюда и получаем представление для производственной функции в терминах переменной k - фондовооружённости:

$$f(k) = C_2[k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C_1]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}.$$

Окончательно, переходя к переменным (K, L), получим:

$$F(K, L) = C_2[K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C_1 L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}.$$

Обозначая $\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$, и выбирая подходящим образом константы $C_1,\ \ C_2,$ приходим к стандартному виду производственной функции с постояной эластичностью замены:

$$F_{CES}(K, L) = A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Рассмотрим предельные случаи CES - функции. А именно, когда $\sigma \to 1 \ \ (\rho \to 0)$ и когда $\sigma \to 0+ \quad (\rho \to +\infty)$.

$$\lim_{\rho \to 0}(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} = \lim_{\rho \to 0} \exp[-\frac{\ln(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})}{\rho}] = *.$$

Неопределённость $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя.

$$* = \lim_{\rho \to 0} \exp[-\frac{\delta(-\ln K)K^{-\rho} = (1-\delta)(-\ln L)L^{-\rho}}{\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}}] =$$
$$= \lim_{\rho \to 0} \exp[\delta \ln K + (1-\delta)\ln L] = K^{\delta} L^{1-\delta} = F_{KD}(K, L).$$

Рассмотрим второй случай. Если $K = L$, то $F_{CES} = K = L$. Если $\ K \ < \ L$, то $K = \min\{\ K,\ L\ \}$. Дальше рассудим так.

$$\lim_{\rho \to +\infty}(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} = \lim_{\rho \to +\infty} K(\delta + (1-\delta)(\frac{L}{K})^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} = K.$$

Если $L \ < \ K$, то $\ L = \min\{\ K,\ L\ \}$ и, рассуждая аналогично, получим

$$\lim_{\rho \to +\infty} (\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} = L.$$

Отсюда и вытекает

$$\lim_{\rho \to +\infty} (\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} = \min\{\ K,\ L\ \} = F_{\infty}(K, L).$$

1.3 Моделирование производственных функций

Итак, после рассмотрения основных характеристик производственных функций, встает вопрос: как выбрать или построить производственную функцию, адекватно моделирующую конкретный экономический объект? Как правило, используя имеющуюся статистическую информацию, подсчитывают разностные аналоги основных экономико – математических показателей и, анализируя их, выбирают или строят ту или иную производственную функцию. Например, если коэффициенты эластичности по фондам α и по труду β мало изменяются, то это может являться аргументом для выбора функции типа Кобба-Дугласа. Достоинством функций этого класса является простота оценки их параметров. Недостаток – возможность полной замены одного ресурса другим – часто не является существенным, поскольку на практике бывают интересны значения ресурсов, достаточно близкие к уже использующимся. Поэтому некоторая неправдоподобность поведения степенных функций в области малых количеств ресурсов не так уж и важна.

Если моделируемая система функционирует в режиме дефицита то одного, то другого ресурсов, тогда такой режим работы хорошо учитывают функции класса CES. Действительно, для CES - функций эластичность по фондам

$$\alpha(k) = k\frac{f'}{f} = k\frac{(\delta k^{-\rho} + (1-\delta))^{-\frac{1}{\rho}-1}\ \delta\ k^{-\rho-1}}{(\delta k^{-\rho} + (1-\delta))^{-\frac{1}{\rho}}} =$$

$$= k(\delta\ k^{-\rho} + (1-\delta))^{-1}\ \delta\ k^{-\rho-1} = \frac{\delta k^{-\rho}}{\delta k^{-\rho} + (1-\delta)} = \frac{\delta}{\delta + (1-\delta)k^{\rho}}.$$

зависит от фондовооруженности $k = K/L$.

Исследуем функцию $\alpha(k)$. Вычислим $\alpha(0) = 1$ и предел

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha(k) = 0.$$

Найдём производную

$$\alpha'(k) = -\frac{\delta\ (1-\delta)\ \rho\ k^{\rho-1}}{(\delta + (1-\delta)\ k^{\rho})^2} < 0.$$

Функция $\alpha(k)$ монотонно убывает на интервале $(0,\ +\infty)$. Найдём вторую производную:

$$\alpha''(k) = -\frac{\delta\ (1-\delta)\ \rho\ k^{\rho-2}}{(\delta + (1-\delta)\ k^{\rho})^3}\ ((\rho-1)\ \delta - (1-\delta)\ (\rho+1)k)$$

и, приравнивая её к нулю в области $k > 0$, получим

$$k_* = \frac{\rho-1}{\rho+1}\ \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Слева от этой точки график функции $\alpha(k)$ имеет выпуклость направленную вверх $(\alpha''(k) < 0)$, справа $(\alpha''(k) > 0)$ - вниз.

Поэтому область $k \geq 0$ разбивается на две части: $(0, k_*)$ – дефицит основных фондов K и $(k_*, +\infty)$ – дефицит трудовых ресурсов. Точка k_* есть точка перегиба графика функции $\alpha(k)$, т.е. $\alpha''(k^*) = 0$. В этой точке оба ресурса бездефицитны. Более сложные ситуации, когда режимы дефицита чередуются с режимами нормальной работы, моделируются с использованием комбинаций CES - функций и функций Кобба–Дугласа. На самом деле. Выше мы показали, что

$$\lim_{k\to+\infty}\alpha(k)=0,$$

т.е., при неограниченном росте фондовооружённости эластичность по фондам $\alpha(k)\to 0$. Если отказаться от такого, экономически не всегда целесообразного условия, и принять, что эластичность производственной функция $\alpha_1(k)$ обладает свойством:

$$\lim_{k\to+\infty}\alpha_1(k)=\alpha_0>0,\quad \alpha_0=\text{const},$$

то эластичность по фондам $\alpha_1(k)$ такой производственной функции можно легко смоделировать соотношением:

$$\alpha_1(k)=\alpha(k)+\alpha_0,$$

где $\alpha(k)$ - эластичность по фондам CES - функции, т.е.

$$\alpha_1(k)=\frac{\delta}{\delta+(1-\delta)k^{\rho}}+\alpha_0.$$

Таким образом, поиск производственной функции $f_1(k)$ при сделанных предположениях об устройстве её эластичности по фондам, сводится к решению дифференциального уравнения вида:

$$k\,\frac{f_1'(k)}{f_1(k)}=\alpha_1(k)=\alpha(k)+\alpha_0.$$

или

$$\frac{f_1'(k)}{f_1(k)}=\frac{\alpha(k)}{k}+\frac{\alpha_0}{k}.$$

Интегрируя, получим:

$$\ln f_1(k) = \ln f(k) + \alpha_0 \ln k + \ln C, \qquad C = \mathrm{const},$$

где $f(k)$ - производственная CES - функции, имеющая эластичность $\alpha(k)$. Отсюда и следует $f_1(k) = Cf(k)k^{\alpha_0}$.

Вспоминая представления CES - функции и функции Кобба - Дугласа в терминах переменной k, получим, что в терминах переменных $(K,\ L)$ производственная функция $F_1(K,\ L)$ будет выглядеть так:

$$F_1(K,\ L) = A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}\ K^{\alpha_0}\ L^{1-\alpha_0}.$$

Заметим, что в этом случае полученная производственная функция имеег степень однородности выше чем единица. Таким образом, мы указали процедуру, по - крайней мере одну из возможных, позволяющую конструировать производственные функции, отталкиваясь от их экономико - математических характеристик и используя в качестве основы сравнительно небольшой набор наиболее популярных производственных функций.

Нередко, когда необходимо решать балансовые задачи планирования, хорошо себя оправдывают производственные функции с постоянными пропорциями. Дело в том, что они несут в себе информацию о рациональной пропорции между различными используемыми ресурсами.

1.4 Производственные функции и технический прогресс

До сих пор мы не учитывали, что производственная функция со временем подвержена изменениям. Рассмотрим кратко основные методы, используемые для описания процесса повышения эффективности использования ресурсов в агрегированных моделях. Отметим, что росту эффективности использования ресурсов способствует большое число технических, организационных и социальных факторов, причем трудно выделить роль каждого из них. В экономико–математических моделях под техническим прогрессом понимают совокупность всех явлений, которые приводят к увеличению выпуска продукта без роста объемов используемых ресурсов.

Как правило, научно–технический прогресс разделяют на эндогенный и экзогенный. Прогресс эндогенный, если его происхождение определяется внутри данной модели и зависит от действий участников экономической системы, моделируемой производственной функцией. Прогресс экзогенный, если технологические изменения не обуславливаются самой моделью (производственной функцией), а лишь учитываются ею.

Среди методов описания технического прогресса в агрегированных моделях можно выделить четыре основных направления. Во-первых, автономный технический прогресс, когда рост эффективности использования ресурсов не зависит от капиталовложений и динамики трудовых ресурсов и привносится извне. Во-вторых, "материальный" прогресс, когда прогресс вносится с новым, более совершенным оборудованием и новой, более квалифицированной рабочей силой, причем эти изменения задаются извне как функции времени. В-третьих, "индуцированный", когда прогресс связывается с предыдущим развитием экономики и является следствием этого развития. В-четвертых, подход на основе выделения особой отрасли в экономике, продуктом которой является технический прогресс. Видим, что первые два направления моделируют экзогенный прогресс, два последних – эндогенный.

Автономный технический прогресс является простейшим подходом к моделированию изменения эффективности производства. Обычно выделяют три случая автономного прогресса:

1) $Y = A(t)F(K, L)$, т.е. эффективности использования основных фондов и трудовых ресурсов растут со временем пропорционально;

2) $Y = F(K, A(t)L)$, т.е. растет эффективность использования трудовых ресурсов, эффективность же основных фондов остается на прежнем уровне;

3) $Y = F(A(t)K, L)$, т.е. растет эффективность использования основных фондов, в то время как эффективность использования трудовых ресурсов остается без изменения.

Коэффициент $A(t)$ часто называют мультипликатором прогресса. Обычно предполагают, что $A(t) = e^{\alpha t}$, и путем обработки экономической статистики находят значение параметра α. Хотя моделирование прогресса подобным образом и утаивает природу его происхождения, но в реальной практике оно достаточно эффективно. В развитых странах темп роста национального дохода в значительной степени определяется автономным прогрессом.

В моделях "материального" прогресса предполагается, что более эффективными с течением времени становятся не все основные фонды, а только вводящиеся в данный момент времени. Пусть $K(t, \tau)$ – количество основных фондов, выпущенных в году τ и сохранившихся к году t, $L(t, \tau)$ – количество рабочей силы, обслуживающей их, $Y(t, \tau)$– выпуск продукции на этих фондах. Тогда производственная функция для всех фондов и всех трудовых ресурсов в году $t \geq \tau$ будет иметь вид:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} Y(t, \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} F(K(t, \tau), L(t, \tau))d\tau.$$

Отметим, что общее количество основных фондов в году t можно определить как

$$K(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t, \tau)d\tau,$$

а общее количество трудовых ресурсов как

$$L(t) = \int_{-\infty}^{t} L(t,\tau) d\tau.$$

Трудовые ресурсы $L(t)$ можно по-разному распределить между основными фондами $K(t)$. Поэтому это распределение $L(t,\tau)$ либо задается априори, либо находится из каких-нибудь специальных условий, например, из условия максимума национального дохода $Y(t)$, что приводит к необходимости решения экстремальных задач.

Выбытие основных фондов часто моделируют при помощи соотношения:

$$K(t,\tau) = I(\tau) e^{-\mu(t-\tau)},$$

где $I(\tau)$ – инвестиции в году τ, μ – темп износа основных фондов.

При другом варианте "материального" прогресса, технический прогресс привносится в экономическую систему не только с новыми основными фондами, но и с ростом квалификации трудовых ресурсов.

Модели эндогенного прогресса более сложны. Не останавливаясь на этом, отметим, что при "индуцированном" прогрессе предполагается, что технический прогресс зависит от того, сколько капиталовложений уже было сделано. Это объясняется следующим образом: чем больше капиталовложений, тем больше совершается инноваций, приводящих к техническому прогрессу. В моделях же, учитывающих прогресс в виде отдельной отрасли, специальным образом выделяют капиталовложения в эту отрасль.

1.5 Математические модели с производственными функциями

В рамках теории производственных функций традиционно исследуется не только процесс производства продукции $Y(t)$, но и процесс потребления трудовых ресурсов. Для иллюстрации рассмотрим простой вариант одной из моделей подобного вида. Будем предполагать, что в каждый момент времени t выпуск продукции $Y(t)$ делится на потребление $C(t)$ и инвестиции (капиталовложения) $I(t)$:

$$Y(t) = C(t) + I(t) = (1 - s(t))Y(t) + s(t)Y(t), \tag{1.10}$$

где $0 \le s(t) \le 1$, $s(t)$ – норма накопления.

Пусть основные фонды амортизируют с темпом $\mu > 0$, т.е. за единицу времени из строя выбывает μ–я часть основных фондов. Тогда, считая трудовые ресурсы $L = \text{const}$, а основные фонды однородными в течение всего времени, динамику основных фондов можно описать дифференциальным уравнением:

$$\dot{K}(t) = s(t)F(K(t), L) - \mu K(t) \tag{1.11}$$

с начальным условием $K(0) = K_0$.

Традиционно накладывают условие типа "экономического горизонта", т.е. за пределами рассматриваемого периода времени $[0, T]$ должен быть сохранен определенный экономический потенциал:

$$\frac{K(T)}{L} \ge k_T > 0. \tag{1.12}$$

В качестве критерия, подлежащего максимизации, выберем

$$\int_0^T \frac{C(t)}{L} e^{-\delta t} dt, \tag{1.13}$$

где $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования, $\frac{C(t)}{L}$ – удельное потребление.

Относительно производственной функции $F(K, L)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условиям (1.2) – (1.5).

Переходя к переменной $k = \frac{K}{L}$ – фондовооруженности, соотношения (1.10) – (1.13) можно переписать в виде:

$$\int_0^T (1 - s(t))f(k(t))e^{-\delta t}dt \to \max, \tag{1.14}$$

при ограничениях:

$$\dot{k}(t) = s(t)f(k(t)) - \mu k(t), \tag{1.15}$$

$$0 \le s(t) \le 1, \;\; k(0) = k_0 > 0, \;\; k(T) \ge k_T > 0. \tag{1.16}$$

Задача (1.14)–(1.16) есть задача оптимального управления, где $k(t)$ – состояние, $s(t)$ – управление. Исследовать ее можно соответствующими методами на основе принципа максимума или достаточных условий оптимальности. Рассмотрим более частный случай, когда $s(t) = s = \text{const}$, т.е. доля капиталовложений не зависит от времени. Это представляет интерес не только с теоретической точки зрения, но и с практической, т.к. в реальной жизни часто дело так и обстоит. В этом случае коэффициенты дифференциального уравнения (1.15) не зависят от времени t, уравнение становится автономным и возникает вопрос о существовании таких значений фондовооруженности $k_s > 0$, что функция $k(t) \equiv k_s = \text{const}$ будет решением уравнения (1.15), т.е. вопрос о существовании стационарных (равновесных) траекторий уравнения:

$$\dot{k} = sf(k) - \mu k.$$

Поскольку $k_s = \text{const}$, то $\dot{k}_s = 0$ и вопрос о существовании стационарных решений сводится к существованию решений алгебраического уравнения:

$$sf(k) - \mu k = 0$$

в области $k \in (0,\ +\infty)$, или, что то же самое, к существованию решений алгебраического уравнения

$$\frac{f(k)}{k} = \frac{\mu}{s}.$$

Из свойств производственной функции $f(k)$ и правила Лопиталя следует, что функция $\frac{f(k)}{k}$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0 на интервале $(0,\ +\infty)$.

Поэтому можно показать, что при любом $s(t) = s > 0$ существует и единственно стационарное решение $k(t) \equiv k_s$ уравнения (1.15), причем, если $k_s \neq k_0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = k_s$ для любой траектории уравнения (1.15) с началом k_0 ($s = \text{const}$).

Вернемся к задаче (1.14)−(1.15) и рассмотрим задачу об отыскании стационарной траектории $k(t) \equiv k_s$, максимизирующей потребление. Оказывается, что такая траектория $k(t) = k^*$ существует и единственна. Так как при $s(t) = s = \text{const}$, $k(t) = k_s = \text{const}$, то максимизация функционала (1.14) сводится к поиску параметра s, доставляющего максимум функции $(1 - s)f(k_s)$.

Преобразуем это выражение. Из автономности дифференциального уравнения следует $f(k_s)s = \mu k_s$. Тогда, заменяя в максимизируемой функции $sf(k_s)$ на μk_s, получим задачу математического программирования:

$$f(k_s) - \mu k_s \quad \to \ \max .$$

Из свойств производственной функции $f(k)$ следует, что функция $f(k_s) - \mu k_s$ вогнута относительно переменной k, дифференцируема в области $k \in (0,\ +\infty)$ и, следовательно, оптимальный параметр k^* находится из условия:

$$f'(k) = \mu.$$

Соответствующая оптимальная норма накопления s^* подсчитывается по формуле

$$s^* = \frac{\mu k^*}{f(k^*)} = \frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)} \tag{1.17}$$

В терминах переменных (K, L) соотношение (1.17) принимает вид:

$$\frac{\partial F(K^*, L)}{\partial K} K^* = s^* F(K^*, L)$$

Тогда, вспоминая, что $\frac{\partial F}{\partial K}$ можно трактовать как норму прибыли с капитала, а $\frac{\partial F}{\partial K} K$ – доход от капитала, можно сформулировать одно замечательное правило, часто называемое как "золотое правило" накопления Е.Фелпса:

инвестиции в основные фонды должны равняться доходу, получаемому от капитала.

Так как для любой траектории уравнения (1.15) с началом $k_0 \neq k^*$ при управлении s^* выполняется условие $\lim\limits_{t \to \infty} k(t) = k^*$, то это означает, что "золотое правило" накопления выполняется в пределе для любой траектории.

Модель (1.10)–(1.13) является одним из вариантов модели Ф.Рамсея. Несмотря на свою простоту, она дает хорошее представление о характере и проблемах, возникающих при ее исследовании.

Глава 2

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

2.1 Контрольные вопросы

1. Понятие производственой функции.

2. Основные экономико - математические характеристики производственных функций.

3. Однородность производственных функций.

4. Эластичность замены факторов.

5. CES - функции.

6. Конструирование производственных функций.

7. Оптимальные пропорции потребления и накопления. "Золотое правило" накопления Фелпса.

8. Моделирование технического прогресса при помощи производственных функций.

9. Оптимальные пропорции потребления и накопления. Постановка задачи и предположения.

10. Предельные случаи CES - функций.

11. Предельная норма замены.

12. Экономико - математические характеристики однородных производственных функций.

13. Основные предположения, накладываемые на производственные функции.

2.2 Контрольные задания

1. Найти коэффициент эластичности по трудовым ресурсам производственной функции, имеющей степень однородности p.

2. Вычислить предельную норму замены трудовых ресурсов основными фондами производственной функции, имеющей коэффициент эластичности замены $\sigma(k) = k, \quad k-$ фондовооружённость.

3. Построить производственную функцию, имеющую эластичность замены факторов $\sigma(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8k^2}, \quad k$ -фондовооружённость.

4. Найти оптимальную норму накопления s, соответствующую "золотому правилу" накопления для производственной функции $F(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$.

5. Построить производственную функцию, имеющую эластичность замены факторов $\sigma(k) = \frac{k+1}{k}, \quad k$ - фондовооружённость.

6. Чему равна предельная норма замены трудовых ресурсов L производственными фондами K производственной функции со степенью однородности p?

7. $F(x), \quad x \in R^n$ - дифференцируемая функция степени p. Будут ли однородными функции $\frac{\partial F}{\partial x_i}$? Если ответ положительный, то найти степень однородности этих функ-

ций.

8. Найти оптимальную норму накопления s, соответсвующую "золотому правилу" накопления для производственной функции $F(K,L) = 1.5K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$.

9. Чему равна эластичность замены факторов σ производственной функции со степенью однородности p?

10. Построить производственную функцию, имеющую эластичность замены факторов $\sigma(k) = \frac{k^2-1}{k^2}$, k -фондовооружённость.

11. Вычислить предельную норму замены трудовых ресурсов основными фондами производственной функции, имеющей коэффициент эластичности замены $\sigma(k) = \frac{k^3+3k^2-k-3}{k^2}$.

12. Найти оптимальные инвестиции в основные фонды, соответствующие "золотому правилу" накопления для производственной функции $F(K,L) = 2K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$.

13. Вычислить доход, получаемый от капитала, соответствующий "золотому правилу" накопления для производственной функции $F(K,L) = 1.2K^{\frac{4}{5}}L^{\frac{1}{5}}$.

14. Найти коэффициент эластичности по фондам производственной функции, имеющей степень однородности p.

15. Вычислить предельную производительность труда производственной функции со степенью однородности p.

Глава 3

МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА

3.1 Историческая справка

Василий Васильевич Леонтьев родился 5.08.1906 года (по другим источникам, 5.08.1905 года)(?!) в Мюнхене, но ещё грудным младенцем был привезён родителями в Петербург. Он вырос в семье университетского профессора, тоже Василия Леонтьева. В 1921 году поступил в Петроградский университет, где изучал философию, социологию, экономику. В 1924 году окончил четырёхгодичный курс университета и получил диплом экономиста. До весны 1925 года Леонтьев работал на кафедре экономической географии Ленинградского университета.

После он уехал в Германию, где учился и работал над докторской диссертацией в Берлинском университете. Темой диссертации было исследование народного хозяйства как непрерывного процесса. В 1928 году Леонтьев получил степень доктора наук. После этого - работа в институте мирового хозяйства в Киле.

Одна из первых научных статей Леонтьева была посвящена анализу баланса народного хозяйства СССР за 1923 - 1924 годы, который представлял собой первую попытку представить в цифрах производство и распределение общественного продукта с целью получения общей картины кругооборота хозяйственной жизни.

В 1928 - 1929 годах В. Леонтьев - экономический советник правительства Китая в городе Нанкине. После возвращения в Германию снова работал в институте мирового хозяйства.

В своей работе Леонтьев впервые применил анализ общего равновесия в качестве инструмента при формировании экономической политики. Предложенная Леонтьевым алгебраическая теория анализа "затраты - выпуск"сводится к системе линейных алгебраических уравнений, в которых параметрами являются коэффициенты затрат на производство продукции. Леонтьев показал, что коэффициенты, выражающие отношения между секторами экономики могут быть оценены статистически, что они достаточно устойчивы и что их можно прогнозировать. Более того, Леонтьевым было показано существование наиболее важных коэффициентов, изменения которых необходимо отслеживать в первую очередь.

В 1931 году директор Национального бюро экономических исследований (США) У. Митчел пригласил Леонтьева на работу в бюро, и тот переехал в США. С 1932 года Леонтьев начал преподавать в Гарвардском университете.В 1933 году он начал свои исследования, из которых вырос метод "затраты - выпуск". Расчёты по методу "затраты - выпуск"требуют большого количества вычислений, без которых сложно делать экономический прогноз и планирование. Однако скоро обнаружилось, что серьезным препятствием для развития этого метода служит слабость тогдашней вычислительной техники. Поэтому, можно сказать, что дальнейшее развитие идей Леонтьева следовало за увеличением мощности вычислительной техники.

Начиная с 1933 – 1934 годов Леонтьев сосредоточивается на преодолении этих проблем посредством сбора информации (коэффициентов) для 44-отраслевой таблицы "затраты - выпуск". Поскольку для решения системы из 44 линейных уравнений, мощностей тогдашней вычислительной техники было недостаточно, для расчётных целей 44 отрасли были объединены в 10. Для проверки стабильности коэффициентов материальных затрат в США были составлены межотраслевые балансы за 1919 - 1929 годы.

Результат этого исследования был опубликован в 1936 году. Центральное место в нём занимала таблица кэффициентов, составленная для экономики США в 1919 году, размерностью 41 $\times$ 41. Леонтьев свёл 41 - мерную матрицу к 10 - мерной и использовал компьютер для получения коэффициентов полных затрат валовой продукции на производство единицы конечной продукции. Леонтьев был первым, кто применил компьютер в исследовании структуры экономических систем.

В 1938 году В. Леонтьев опубликовал работу "Современное значение экономической теории К. Маркса", которая содержала попытку объективного анализа экономической теории Маркса.

В 1941 году была составлена 41 - мерная таблица межотраслевых потоков, рассчитанная для 1929 года, и агрегированная затем в 10 - мерную. На её основе были рассчитаны объёмы валового выпуска продукции, необходимые для удовлетворения конечного спроса. Обе межотраслевые таблицы были опубликованы в монографии Леонтьева "Структура американской экономики 1919 - 1929 гг.". Сравнение таблиц позволило проверить устойчивость коэффициентов материальных затрат и выяснить возможности эффективного прогнозирования. Сравнение таблиц не позволило прийти к однозначному выводу, частично из-за отсутствия достаточно чётких критериев устойчивости оцениваемых коэффициентов. Тем не менее межотраслевые таблицы для прогнозирования были признаны вполне целесообразными. Статистическое Бюро занятости США, пригласив В. Леонтьева в качестве консультанта, составило таблицу, включающую 400 отраслей. Она была использована для прогнозирования занятости населения в послевоенный период. Метод "затраты - выпуск"стал широко использоваться во всём мире.

В 1944 году Леонтьев рассчитывает таблицу коэффициентов текущих материальных затрат за 1939 год, сопоставляет её составленными ранее и обнаруживает вполне достаточную степень устойчивости большинства коэффициентов за два десятилетия. Используя эту таблицу, в 1944 - 1946 годахон публикует 3 статьи, где с помощью метода "затраты - выпуск"была получена оценка экзогенного влияния занятости, заработной платы и цен на выпуск валовой продукции по отдельным отраслям.

С конца 40 - х годов особое внимание Леонтьев уделяет развитию межрегионального анализа "затраты - выпуск"и составлению матрицы инвестиционных коэффициентов, с помощью которых можно судить о последствиях изменения конечного спроса на инвестиции. Так было положено начало динамическому методу "затраты - выпуск", на основе которого можно анализировать экономический рост. Результаты исследований были опубликованы в книгах "Стуктура американской экономики 1919 - 1939 гг."и "Исследование структуры американской экономики".

Леонтьев показал себя выдающимся организатором. В 1948 году он создал Гарвардский центр экономических исследований, который стал ведщщим в мировом масштабе учреждением по развитию метода "затраты - выпуск". Вокруг Леонтьева сложилась группа исследователей - единомышленников, его соавторов по многим последующим публикациям.

Несомненнно, одним из важнейших результатов этого периода стал так называемый "парадокс Леонтьева", который заключается в том, что, если принять во внимание и прямые и косвенные затраты в процессе воспроизводства, для США экспорт оказывается более трудоёмким и менее капиталоёмким, чем импорт, хотя в США исключительно сильна инвестиционная сфера и очень высока заработная плата.

США импортируют капитал и экспортируют труд.

Леонтьев и сотрудники Гарвардского экономического исследовательского центра на основе метода "затраты - выпуск"оценили инфляционное влияние в регулировании зарплаты, рассчитали затраты на вооружение и их влияние на разные отрасли экономики, осуществили прогнозирование темпа роста отраслей экономики и необходимые для этого вложения.

В дальнейшем В. Леонтьев обращается к проблемам роста мировой экономики, его влиянию на окружающую среду, потребностей в природных ресурсах, к исследованию отношений между развитыми и развивающимися странами. В рамках ООН он руководил исследованиями по развитию мировой экономики до 2000 года.

Леонтьев был консультантом правительства Франклина Рузвельта в период проведения им "Нового курса", а также во время Второй мировой войны. В 1970 году избирался президентом Американской экономической ассоциации. В 1975 году избрался заведующим кафедрой в Нью-Йоркском университете, где вскоре возглавил университетский Институт экономического анализа. Достигнув 80 лет, Леонтьев оставил административный пост, но остался безусловным интеллектуальным лидером.

Приезд крупных иностранных учёных - экономистов в СССР был большой редкостью. Возможно, за этим стояла политика, поскольку визит совпал с подготовкой поездки советского лидера Хрущёва в США,которая памятна короткой дружбой Н.С.Хрущёва с президентом Эйзенхауэром. Леонтьев не был политической фигурой, но сама его личность воплощала связь обеих наций, а его научные достижения могли пригодиться для международного сотрудничества.

Леонтьев прочёл лекцию в Институте мировой экономики и международных отношений. Его принимали в Госплане, в Институте экономики АН, в Центральном статистическом управлении. Приезд Леонтьева и его беседы с руководителями этих учреждений укрепили позиции экономико - математического направления в советской экономике, связаннного с именами таких учёных, как Л.В.Канторович (впоследствии лауреат Нобелевской премии), В.С.Немчинов, В.В.Новожилов, Н.П.Федоренко. Может быть, Центральный экономико - математический институт АН - ведущая организация в стране занимающаяся экономико - математическим моделированием, в чём - то обязан своим основанием авторитету Леонтьева.

Кроме всего прочего, Леонтьев - талантливый популяризатор науки и незаурядный литератор. Он наглядно показал родство его метода и линейного программирования, в развитие которого внёс важнейший вклад Канторович,как разных, хоть и близких, подходов к предмету экономической науки - обоснованию эффективных и рациональных способов использования ограниченных ресурсов.

В 60 - 70 - х годах метод "затраты - выпуск"и анализ межотраслевых балансов получил всеобщее признание в мировой экономической науке и стали обычными в статистической практике. Когда с 1969 года началось присуждение Нобелевских премий по экономике, Леонтьев оказался одним из первых кандидатов. Он стал лауреатом в 1973 году с такой формулировкой научных заслуг: "за развитие метода "затраты - выпуск"и за его применение к важным экономическим проблемам". Характерно, что среди первых лауреатов преобладали эконометрики, математически и статистически ориентированные экономисты, чьи работы имеют наиболее выраженное практическое значение. Эта ситуация разительно отличается от ситуации нынешних дней и критериев присуждения Нобелевских премий по экономике.

Научная деятельность Леонтьева в этот период развивалась в двух главных направлениях. Во - первых, он продолжал плодотворно работать над динамизацией модели "затраты - выпуск", чтобы она работала с учётом технического прогресса, меняющего структуру экномики (в модели это проявляется в изменении технологических коэффициентов). Практически это особенно важно для выбора оптимальных инвестиционных решений. Во - вторых, он перешел от анализа экономики США к анализу мировой экономики, межрегиональных связей в ней, отношений между развитыми и развивающимися странами.

Интерес Леонтьева к проблемам мировой экономики определил содержание лекции, прочитанной им по традиции при вручении Нобелевской премии. К этому времени Леонтьев уже включился в огромный проект по исследованию структуры перспектив мировой экономики с помощью метода "затраты - выпуск", который осуществлялся под эгидой ООН и под его научным руководством.

В нобелевской лекции он популярно объяснял цели и методологию этого невиданного по своим масштабам исследования. Оно потребовало не только знаний и опыта Леонтьева, но и мобилизации его организаторских способностей, умения работать с большими коллективами людей разных профессий и квалификации. Итоги исследований были опубликованы в 1977 году в докладе "Будущее мировой экономики", переведённой спутя два года на русский язык.

Проект, выполненный Леонтьевым и его группой, представлял собой гигантскую модель типа "затраты - выпуск", в которой мир был поделён на 15 регионов по 45 секторов в каждом, связанных балансовыми торговыми отношениями. Авторы стремились реалистически оценить перспективы мировой экономики до 2000 года, её потребности в основных видах сырья, потоки товаров и капиталов между группами развитых и развивающихся стран. Это была работа, беспрецедентная по объёму используемой статистики и применения вычислительной техники.

Статистико - аналитические исследования такого типа представляют собой нащупывание путей к всемирной экономической интеграциии и к программированию мировой экономики и международных отношений. Конечно, в современной политической ситуации это выглядит утопией, но лишь в такой интеграции можно видеть перспективы человеческой цивилизации. Экономисты должны смотреть выше политических , национальных и иных конфликтов и моделировать благополучное будущее человечества. Их задача - разрабатывать пути в сфере производства и обмена, способные помочь в движении к этой цели. Именно об этом говорил Леонтьев в 1979 году. Мир значительно изменился, но эти идеи стали только актуальнее.

В его публикациях, затрагивающих или прямо исследующих советские и российские проблемы, видится своеобразное сочетание подходов, которое можно назвать "отстранённостью и вовлечённостью". С одной стороны, это подход благожелательного иностранца, учёного - эксперта, беспристрастно рассматривающего проблемы данной страны. С другой - подход человека, для которого Россия не такая же страна, как десятки других, с которыми он имел дело в своей научной жизни. В 1988 году научные заслуги Леонтьва были признаны, наконец - то, в СССР. Он был избран иностранным членом Академии наук СССР. В восьмидесятые - девяностые годы прошлого века Леонтьев установил тесную свяь в СССР (Россией). Он неоднократно приезжал в свой родной город - Петербург. Его любимым выражением было : "Побольше бы ветра конкуренции в паруса вашей плановой экономики".

Помимо Нобелевской премии, Леонтьев был возведён в звание офицера ордена Почётного легиона Франции. Он - член американской Национальной академии наук, Американской академии наук и искусств. Среди прочих ему присвоены почётные докторские степени университетов Брюсселя, Йорка, Лувена, Парижа.

Умер Василий Леонтьев 5 февраля 1999 года.

Анализ экономики по методу "затраты - выпуск"относится к той области экономики, создателем которой был швейцарский экономист французского происхождения 19 - го века Леон Вальрас. Подход Вальраса известен как теория общего равновесия. Эта теория ставит в центр проблемы взаимозависимость всех экономических отношений. Математически, в самом общем виде, она представляет собой довольно своеобразную систему отношений, выражающих экономику, как единое целое. Своеобразие этой теории таково, что только лишь спустя 80 лет, в частном случае модели Вальраса, однако сохраняющем её суть, было доказано существование решения, называемого конкурентным равновесием. Причём, для этого доказательства самой математике пришлось пройти достаточно длительный путь, построив соответствующие теоретические разделы, которых не было, позволившие решать и исследовать подобного типа задачи. Не мудрено, что приверженцы теоретической модели Вальраса столкнулись с тем, что эмпирическое использование её принципов оказалось крайне сложной задачей.

С самого начала своей работы Леонтьев признавал систему взаимозависимостей модели Вальраса. Однако до систематического применения Леонтьевым этих взаимозависимостей на практике, анализ общего равновесия не использовался как инструментарий в процессе формирования экономической политики. До нововведений Леонтьева главным методом в основном направлении экономической науки был анализ частичного равновесия, ставящий в центр внимания небольшое число изменяющихся переменных. Так, например, экономист мог рассчитать, как налог на импортируемую нефть мог отразиться на спросе на автомобильный бензин, игнорируя при этом любые отдалённые последствия, которые этот налог мог вызвать в сталелитейной промышленности или где ещё. Экономисты в течение длительного времени сознавали тот факт, что анализ частичного равновесия серьёзно искажает реальность, если масштабы промышленности или степень изменений, которые подвергаются изучению, достаточно велики. Применение Леонтьевым системы Вальраса для решения этих проблем и вызвало появление метода "затраты - выпуск".

По сути, Леонтьев отказался от всеобщности модели Вальраса, сохранив идеи её законов сохранения, агрегировал экономические показатели и свёл модель к системе линейных алгебраических уравнений, в которых параметрами являются коэффициенты затрат на производство продукции. Реалистическая гипотеза и относительная простота (правда, иногда весьма относительная) измерения этих коэффициентов определили огромные аналитические и прогностические возможности метода "затраты - выпуск".

Леонтьев критически относился к деятельности нео - кембриджской школы, яркими представителями которой были Джон Хикс и Джон Мейнард Кейнс. Выступал против, как он называл, "слепого"теоретизирования, присущего многим представителям этой школы. Леонтьев всегда был убеждён, что, разработав и чётко сформулировав теорию, исследователь только начинает работу. Основной его задачей является доказательство того, что с помощью теории можно прогнозировать экономическое развитие и результаты этих работ могут быть проверены и использованы на практике. Леонтьев всегда считал, что теоретические понятия существуют только в реальности.

3.2 Построение модели

Основы систематизированной экономической теории были заложены в восемнадцатом веке Адамом Смитом. В дальнейшем, в трудах многих экономистов постепенно раскрывались общие закономерности, лежащие в основе различных экономических явлений. Часто оказывалось, что эти явления в своей основе несут некие математические закономерности. И, с течением времени, многие из этих закономерностей были оформлены в виде математических моделей. Однако, реальная экономическая действительность настолько сложна, что ни одна отдельно взятая модель не может адекватно отобразить эту реальность. Тем не менее, если не занимать крайнюю позицию – построить глобальную модель экономики, которая учитывала бы всё в ней происходящее, а заняться построением моделей отражающих какие–либо частные явления, то на этом пути можно рассчитывать на создание вполне адекватных математических моделей, допускающих как детальное исследование, так и разумную экономическую интерпретацию результатов. Часто одним из подходов к построению модели служит дезагрегирование (разукрупнение) реальной экономической ситуации. Степени этого дезагрегирования могут быть различными. Это и моделирование крупных обобщенных экономических показателей – национальный доход, затраты труда и капитала для его производства. Это и моделирование чуть ли не атомарных составляющих конкурентной экономики – поведения потребителей и производителей.

В основе многих линейных моделей экономики лежит схема межотраслевого баланса. При этом подходе производственные процессы дезагрегируются (разукрупняются) до уровня чистых отраслей (секторов производства). Таким образом, делается предположение, что продукция каждой из этих отраслей однородна. В дальнейшем, одна из основных задач – анализ перетока продуктов между этими отраслями. Чистая отрасль – некоторая экономическая абстракция, вообще говоря, не существующая реально и содержащая в себе все технологические способы производства, выпускающие один тип продукта. Впервые этот подход систематически применялся в 1920-е годы в СССР. Позднее, в 1930-х годах, этот подход получил свое дальнейшее развитие и приобрел свой законченный классический вид в работах В.В. Леонтьева по изучению статической структуры американской экономики. В 1973 году В.В. Леонтьев получил за свои работы Нобелевскую премию по экономике. Леонтьевский подход оказался оказался весьма эффективным при моделировании и исследовании как экономик различных стран, так и мировой экономики.

Основные предположения, накладываемые на подобным образом частично дезагрегированную модель экономики, следующие:

1) в экономической системе производятся, продаются, покупаются и потребляются n типов продуктов;

2) каждая отрасль производит только один тип продукта. Совместное производство различных продуктов исключается. Разные отрасли производят разные типы продуктов;

3) под производственным процессом в каждой отрасли понимается преобразование нескольких типов продуктов, взятых в определённых количествах, в некоторое количество продукта одного типа. При этом соотношение затрачиваемых и выпускаемого продуктов предполагается постоянным.

Из предположения 2) следует, что n отраслей и n типов продуктов находятся во взаимно однозначном соответствии, т.е. отрасль i выпускает продукт i.

Обозначим через a_{ij} количество единиц продукта i, $i = \overline{1,n}$ необходимое для производства одной единицы продукта j, $j = \overline{1,n}$. Тогда выпуск λ единиц продукта j требует затрат λa_{ij} единиц продукта i. Величины a_{ij} называют технологическими коэффициентами. В силу предположения 3) они постоянны.

Пусть x_j – выпуск продукта j в единицу времени (например, в год, месяц, и т.д.). Название величины x_j, в зависимости от целей моделирования, может быть различным. Это и валовый выпуск отрасли j и интенсивность функционирования отрасли j. Часто эти различные названия в одном и том же тексте используются как синонимы.

Часть валового выпуска продукта i потребляется в виде затрат, необходимых для производства всех других продуктов, включая сам продукт i, а именно, эта часть есть величина $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Тогда чистый выпуск i – го продукта равен

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = \overline{1,n}.$$

Приравнивая чистый выпуск отрасли i конечному спросу c_i на продукт i, который может быть использован на непроизводственные цели и накопление, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = c_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

Система уравнений (3.1) является основой для анализа межотраслевых связей методом, который называется "затраты – выпуск". При указанном выше подходе, переменные c_i понимаются как величины экзогенные, заданные извне по отношению к модели. Суть леонтьевского подхода заключается в определении вектора валового выпуска (интенсивностей технологических способов) $x = (x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n)$ по заданному априори вектору конечного спроса $c = (c_1, \ c_2, \ \cdots, \ c_n)$ в рамках данных технологических возможностей, описываемых коэффициентами $a_{ij}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,n}$. Систему (3.1) с указанной интерпретацией входящих в неё величин и называют моделью Леонтьева.

Обозначим через A матрицу, составленную из технологических коэффициентов $a_{ij}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,n}$. Тогда модель Леонтьева можно записать в векторно – матричном виде:

$$x - Ax = c. \tag{3.2}$$

Таким образом, анализ модели Леонтьева сводится к исследованию системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей $E - A$ при неизвестных $x \in R^n$. Вроде бы ничего особенного, однако экономическая трактовка величин $A, \ x, \ c$ накладывает специфические ограничения: $x_i \geq 0, \ c_i \geq 0, \ a_{ij} \geq 0$. То есть, при заданных неотрицательных векторе $c \in R^n$ и матрице A найти неотрицательное решение системы уравнений (3.2). Теперь уже не столь очевиден ответ на вопрос: существует ли такое решение и когда? Будем в дальнейшем, для краткости, матрицу A с неотрицательными (положительными) элементами $a_{ij} \geq 0 (a_{ij} > 0)$ обозначать $A \geq 0 (A > 0)$. Это следует заметить, поскольку в математике обозначение $A \geq 0 (A > 0)$ часто используется для матриц неотрицательно (положительно) определённых.

Если решение $x \geq 0$ системы уравнений (3.1) существует при любом векторе $c \geq 0$, то говорят, что модель Леонтьева продуктивна. Структура модели Леонтьева однозначно определяется технологической матрицей A. Поэтому часто говорят, что матрица A продуктивна.

Запишем систему уравнений (3.2) в виде:

$$(E - A)x = c.$$

Если матрица $E - A$ невырождена, то система (3.2) имеет единственное решение:

$$x = (E - A)^{-1}c.$$

Тогда, при условии, что все элементы обратной матрицы $(E - A)^{-1}_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$, любой неотрицательный вектор $c \geq 0$ даёт неотрицательное решение $x \geq 0$ системы уравнений (3.2).

Обратно. Обозначим через $D = E-A$. Из определения матрицы D следует, что все её внедиагональные элементы $d_{ij} \leq 0,\ i \neq j$. Покажем, что матрица D невырождена.

Если модель Леонтьва продуктивна, то для любого вектора $c \geq 0$ существует неотрицательное решение $x \geq 0$ системы (3.2). Выберем вектор $c \in R^n$ строго положительным: $c > 0$. Отсюда следует, что решение системы (3.2) – вектор x удовлетворяет неравенству $x \geq c > 0$. Выпишем i – е уравнение системы (3.2):

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j = c_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Перегруппировав слагаемые в левой части равенства, получим:

$$d_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} d_{ij}x_j = c_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Поскольку имеют место неравенства:

$$x_j > 0, \quad c_i > 0, \quad \sum_{j \neq i} d_{ij} x_j \leq 0,$$

то они возможны только при $d_{ii} > 0, \ i = \overline{1,n}$.

Упрощая определитель матрицы D, вычислим его.

$$|D| = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & d_{22}^{(1)} & \cdots & d_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & d_{n2}^{(1)} & \cdots & d_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = d_{11} \cdot \begin{vmatrix} d_{22}^{(1)} & \cdots & d_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n2}^{(1)} & \cdots & d_{nn}^{(1)} \end{vmatrix},$$

где $d_{ij}^{(1)} = d_{ij} - \dfrac{d_{1j} d_{i1}}{d_{11}}, \quad i,j = \overline{2,n}$.

Если $i \neq j$, то $d_{ij}^{(1)} \leq 0$, в силу неположительности $d_{ij}, \ i \neq j$ и положительности $d_{11} > 0$. Проведённое упрощение есть ни что иное как первый шаг метода Гаусса. Вычислим правые части системы (3.2) при этом упрощении:

$$c_i^{(1)} = c_i - \frac{d_{i1} c_1}{d_{11}}, \quad i = \overline{2,n}.$$

Так как $c_i > 0, \ d_{i1} \leq 0, \ i = \overline{1,n}, \ d_{11} > 0$, то $c_i^{(1)} > 0$. Поскольку преобразования метода Гаусса не изменяют решение системы линейных уравнений, то тот же вектор $x > 0$ – решение системы (3.2), будет также решением системы линейных уравнений:

$$D^{(1)} x = c^{(1)},$$

где $c^{(1)} = (c_1, c_2^{(1)}, \ \cdots, \ c_n^{(1)})$; матрица

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & d_{22}^{(1)} & \cdots & d_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & d_{n2}^{(1)} & \cdots & d_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Выпишем покомпонентно уравнения данной системы, начиная со второго:

$$d_{ii}^{(1)} + \sum_{j \neq i} d_{ij}^{(1)} x_j = c_i^{(1)}, \quad i = \overline{2, n}.$$

В силу неравенств $c_i^{(1)} > 0,\ d_{ij}^{(1)} \leq 0,\ x_j > 0$, получаем, что $d_{ii}^{(1)} > 0$.

Продолжая аналогичным образом вычислять определитель матрицы D, упрощая его по методу исключения Гаусса ещё $(n-2)$ раза, получим, что определитель матрицы D равен определителю верхней треугольной матрицы:

$$D^{(n-1)} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & d_{22}^{(1)} & \cdots & d_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

где

$$d_{ij}^{(s)} = d_{ij}^{(s-1)} - \frac{d_{sj}^{(s-1)} d_{is}^{(s-1)}}{d_{ss}^{(s-1)}},\ i, j = \overline{s, n},\ s = \overline{1, n-1}. \tag{3.4}$$

При $s = 1$ величины $d_{ij}^{0} = d_{ij}$.

Очевидно,

$$|D| = |D^{(n-1)}| = d_{11} \cdot d_{22}^{(1)} \cdot \cdots \cdot d_{nn}^{(n-1)} > 0.$$

Таким образом, матрица $D = E - A$ невырождена и, следовательно, существует обратная матрица $(E-A)^{-1}$. Так как при любом векторе $c \geq 0$ решение системы (3.2) – вектор $x \geq 0$, то из соотношения $x = (E-A)^{-1}c$ следует, что это возможно только при условии $(E-A)_{ij}^{-1} \geq 0,\ i, j = \overline{1, n}$.

Определение 1. *Квадратная матрица D называется неотрицательно обратимой, если выполнены условия:*

1) существует D^{-1};

2) $D^{-1}_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, n}$.

Подводя итог вышеприведённым рассуждениям, можно сформулировать критерий продуктивности модели Леонтьева.

Теорема 1. *Модель Леонтьева (3.2) продуктивна тогда и только тогда, когда матрица* $E - A$ *неотрицательно обратима.*

Из доказательства теоремы 1 следует несколько большее, чем требовалось доказать.

1). В определении продуктивности модели Леонтьева вместо условия существования неотрицательного решения $x \geq 0$ системы (3.2) при любом неотрицательном векторе $c \geq 0$ достаточно требовать существования решения $x > 0$ системы (3.2) при некотором $c > 0$.

2). Фактически была показана не просто невырожденность матрицы D, но и положительность всех последовательных главных миноров матрицы D. Это не случайно.

Теорема 2 (Хокинс - Саймон). *Для того чтобы модель Леонтьева была продуктивной необходимо и достаточно, чтобы последовательные главные миноры матрицы* $D = E - A$*, т.е. миноры вида*

$$\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & \cdots & d_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

были положительными.

Доказательство. Необходимость была показана при доказательстве теоремы 1. Докажем достаточность.

Пусть $c \geq 0$ - произвольныц неотрицательный вектор. Покажем, что существует неотрицательный вектор $x \geq 0$ - решение системы линейных уравнений (3.2).

Решим систему (3.2) методом Гаусса. После приведения матрицы D к виду (3.3), из условия положительности всех последовательных главных миноров матрицы D следует, что $d_{11} > 0,\ d_{22}^{(1)} > 0,\ \cdots,\ d_{nn}^{(n-1)} > 0$. Внедиагональные элементы матрицы $D^{(n-1)}$ вычисляются по формулам (3.4) и все они неположительны. Правые части системы (3.2) после преобразований метода Гаусса вычисляются по формулам:

$$c_i^{(s)} = c_i^{(s-1)} - \frac{d_{is}^{(s-1)} c_s^{(i-1)}}{d_{ss}^{(s-1)}}, \quad i = \overline{s,n}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

При $s_1 = 1$ величина $c_i^{(0)} = c_i$. В силу сторогой положительности $d_{ss}^{(s-1)} > 0$, неотрицательности $c_i^{(s-1)} \geq 0, \quad c_s^{(s-1)} \geq 0$ и неположительности $d_{is}^{(s-1)}$ величина $c_n^{(n-1)} \geq 0$. Тогда из последнего уравнения

$$d_{nn}^{(n-1)} x_n = c_n^{(n-1)}$$

находим $x_n = \dfrac{c_n^{(n-1)}}{d_{nn}^{(n-1)}}$ и, выполняя обратный ход метода Гаусса, убеждаемся, что и все остальные переменные $x_{n-1},\ \cdots,\ x_1$ также неотрицательны. Отсюда и следует, что модель Леонтьева продуктивна. Теорема доказана.

Пример 1. Исследовать на продуктивность модель Леонтьева, определяемую матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

1). Воспользуемся теоремой 1. Матрицы

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.6 \\ -0.3 & 0.5 & -0.1 \\ -0.4 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix},$$

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,386}\begin{pmatrix} 0.38 & 0.28 & 0.32 \\ 0.28 & 0.48 & 0.27 \\ 0.26 & 0.26 & 0.39 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица $E-A$ неотрицательно обратима, то модель Леонтьева продуктивна.

2). Воспользуемся теоремой 2. Последовательные главные миноры матрицы $E-A$ есть:

$$|E-A|_1 = 0.9, \quad |E-A|_2 = 0.39, \quad |E-A| = 0.386.$$

Поскольку все они положительны, то матрица A продуктивна.

Глава 4

СВОЙСТВА МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

4.1 Неразложимые матрицы

Технологическая матрица A в модели Леонтьева описывает взаимосвязь между отраслями в смысле взаимных поставок продукции. Элементы матрицы A могут быть как строго положительными, так и нулевыми. Положительность элемента a_{ij} означает, что отрасль j непосредственно использует продукцию отрасли i. Если же $a_{ij} = 0$, то непосредственного использования нет. Расположение нулевых элементов в матрице A играет большую роль как при изучении свойств модели Леонтьева, так и при принятии конкретных решений. Если нулевые элементы расположенны в определённом порядке, то это позволяет разбить (разложить) модель Леонтьева на некоторые группы отраслей, производство в которых может осуществляться более или менее независимо. Конретизируем это.

Обозначим через N множество первых n натуральных чисел: $N = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$. Напомним, что n – это количество отраслей (продуктов) в модели Леонтьева. Пусть $S \subset N$ - некоторое подмножество. Обозначим через $S' = N \backslash S$ - дополнение множества S до множества N.

Определение 1. *Будем называть множество S изолированным подмножеством в N, если $a_{ij} = 0$ при $j \in S,\ i \in S'$.*

Определение 2. *Матрица A называется неразложимой, если в множестве N нет изолированных подмножеств.*

Если в множестве N есть изолированные подмножества, то матрица A называется разложимой.

Понятие изолированного множества S допускает хорошую экономическую интерпретацию: отрасли, номера которых принадлежат множеству S, не нуждаются в товарах, производимых отраслями, номера которых принадлежат множеству S'. Таким образом, множество отраслей S в отношении поставок ресурсов находится в режиме самообеспечения (автаркии), т.е. может существовать независимо от остальных отраслей. Но такая автаркия не обязательно имеет место по отношению к сбыту продукции отраслей из S, т.е. не обязательно $a_{ij} = 0,\ i \in S,\ j \in S'$.

Однако, если же и последние соотношения имеют место, то экономическая система полностью распадается на две группы отраслей S и S', каждая из которых работает в режиме полного самообеспечения и между ними не происходит ни какого взаимодействия.

Если матрица $A \geq 0$ разложима, то перестановкой строк и столбцов матрицы A, что соответствует перенумерации отраслей и товаров, её можно привести к виду:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $A_1,\ A_3$ – квадратные подматрицы матрицы A порядков k и $n-k$, соответственно. Здесь k - количество элементов в множестве S. A_2 – прямоугольная подматрица размерности $k \times (n-k)$, 0 - прямоугольная подматрица размерности $(n-k) \times k$, состоящая из нулей. Если имеет место полная автаркия, то и подматрица $A_2 = 0$. Отсюда следует важный вывод - если модель Леонтьева описывается при помощи разложимой матрицы, то выявив изолированные множества (их может быть несколько), можно как упростить исследование модели, так и лучше понять суть моделируемого объекта. Понятие неразложимости матрицы также допускает экономическую интерпретацию. Неразложимость означает, что каждая отрасль хотя бы косвенно, но использует продукцию всех остальных отраслей. Если $a_{ij} > 0$, то как отмечалось выше, использование непосредственное, если $a_{ij} = 0$, то непосредственного использования нет, но существует последовательность отраслей с индексами $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m$, где $i_1 = i,\ i_m = j$ такая, что $a_{i_s i_{s+1}} > 0,\ s = \overline{1, m-1}$. Другими словами, отрасль j использует непосредственно продукцию отрасли i_{m-1}, поскольку $a_{i_{m-1}j} > 0$, отрасль i_{m-1} использует непосредственно продукцию отрасли i_{m-2}, так как $a_{i_{m-2}i_{m-1}} > 0$ и так далее. Отрасль i_2 использует непосредственно продукцию отрасли i, поскольку коэффициент $a_{ii_2} > 0$. На самом деле данное свойство обратимо, т.е. из существования последовательности отраслей с указанными свойствами следует неразложимость матрицы A.

Часто определение разложимой матрицы таково: матрица A называется разложимой, если её можно при помощи некоторой матрицы перестановок представить в блочном виде (4.1). Под матрицей перестановок понимается матрица, умножение на которую приводит к перестановке строк или столбцов исходной матрицы. Например, если в единичной матрице E поменять местами первую и вторую строки, то получим матрицу перестановок, умножение на которую справа произвольной квадратной матрицы A ведёт к перемене в этой матрице первого и второго столбцов местами, а умножение на эту же матрицу слева ведёт к перемене местами первой и второй строк матрицы A.

Рассмотрим ряд свойств неразложимых матриц, выделяющих их из произвольных неотрицательных матриц.

1). *В неразложимой матрице* $A \geq 0$ *нет нулевых строк и столбцов.*

Предположим противное. Пусть строка с номером i - нулевая. Обозначим $S = N \setminus \{i\}, \quad S' = \{i\}$. Тогда $a_{ij} = 0, \ i \in S', \ j \in S$. Следовательно, S – изолированное множество и матрица A разложима, чего не может быть.

2). *Если матрица* $A \geq 0$ *неразложима и вектор* $x \in R^n$ *строго положителен* $x > 0$*, то* $Ax > 0$.

Рассмотрим i - ю компоненту вектора Ax:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j > 0,$$

т.к. вектор $x > 0$, а в матрице A нет нулевых строк.

3). *Пусть матрица* $A \geq 0$ *неразложима. Вектор* $x \geq 0, \ x \neq 0$. *Обозначим* $S = \{i : \ x_i > 0\}, \ y = Ax, \ T = \{i : \ y_i > 0\}, \ S' = N \setminus S$. *Тогда если* $S' \neq \emptyset$*, то* $S' \bigcap T \neq \emptyset$.

Пусть $T' = N \setminus T$. Предположим противное: $S' \bigcap T = \emptyset$. Тогда $S' \subset T'$. Выберем индекс $i \in S'$. Из предыдущего включения следует, что $i \in T'$. Тогда имеем следующие соотношения:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j \in S} a_{ij} x_j = 0.$$

Поскольку для каждого $j \in S \ \ x_j > 0$, то последнее равенство возможно лишь при $a_{ij} = 0$, при $i \in S', \ \ j \in S$. А это противоречит неразложимости матрицы A.

4). *Если* $A \geq 0$ *– неразложимая матрица, вектор* $x \geq 0, \ \ x \neq 0$*, то вектор* $y = (E + A)x$ *имеет меньше нулевых координат, чем вектор* x*, если вектор* x *не является строго положительным.*

На самом деле, $y = (E + A)x = x + Ax$. Тогда ненулевые координаты вектора y – это ненулевые координаты вектора x, а также часть ненулевых координат вектора Ax, стоящих на месте части нулевых координат вектора x, по свойству 3).

5). *Пусть* $A \geq 0$ *– неразложима и вектор* $x \geq 0, \quad x \neq 0$. *Тогда из выполнения неравенства* $Ax \leq \alpha x$ *следует, что* $\alpha > 0, \quad x > 0$.

Если $x > 0$ то, очевидно, что $\alpha > 0$. Если $x \geq 0, \quad x \neq 0$, то $Ax \geq 0, \quad Ax \neq 0$. Учитывая свойство 3), получаем, что выполнение неравенства $Ax \leq \alpha x$ невозможно, если не выполняются соотношения $\alpha > 0, \quad x > 0$.

6). *Пусть* $A \geq 0$ *– неразложимая матрица порядка* n. *Тогда матрица* $(E + A)^{n-1} > 0$.

Из свойства 4) следует, что для любого вектора $x \geq 0, \; x \neq 0$ вектор $(E+A)^{n-1}x > 0$. Покажем, что матрица $(E + A)^{n-1} > 0$. Предположим противное, что существует элемент $(E + A)^{n-1}_{ij} = 0$. Выберем вектор $\overline{x} \in R^n$, таким, что на j – ом месте компонента $\overline{x}_j > 0$, а все остальные компоненты равны нулю. Тогда $\overline{x} \geq 0, \quad \overline{x} \neq 0$. В этом случае

$$((E + A)^{n-1}\overline{x})_i = \sum_{k=1}^{n}(E + A)^{n-1}_{ik}\overline{x}_k = (E + A)^{n-1}_{ij}\overline{x}_j = 0.$$

а это противоречит тому, что $((E + A)^{n-1}\overline{x})_i > 0$.

7). *Пусть* $A \geq 0$ *– неразложима. Тогда для любой пары индексов* (i, j) *существует натуральное число* m *такое, что* $A^m_{ij} > 0$.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона для матрицы $(E + A)^{n-1}$:

$$(E + A)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C^i_{n-1}A^i = E + C^1_{n-1}A + C^2_{n-1}A^2 + \;\cdots\; C^{n-1}_{n-1}A^{n-1}.$$

Здесь C^l_k – биномиальные коэффициенты. Рассмотрим два случая.

Если $i \neq j$, тогда из условия $(E + A)^{n-1} > 0$ следует, что хотя бы в одном из слагаемых в формуле бинома Ньютона на месте (i, j) стоит ненулевой элемент.

Показатель степени m, отвечающий этому слагаемому и будет искомым.

Пусть теперь $i = j$. Рассмотрим матрицу $A(E+A)^{n-1}$. Поскольку $(E+A)^{n-1} > 0$, то из свойства 2) следует, что $A(E+A)^{n-1} > 0$. Ещё раз воспользовавшись формулой бинома Ньютона:

$$A(E+A)^{n-1} = A + C_{n-1}^{1} A^2 + \ \cdots + \ C_{n-1}^{n-1} A^n > 0$$

и, повторив вышеприведённые рассуждения, получаем, что существует показатель степени m такой, что $A_{ii}^m > 0$.

8). *Матрица $A \geq 0$ неразложима тода и только тогда, когда для любых индексов (i,j) существует последовательность индексов $\{i_s\}_{s=0}^m$ такая, что $i_0 = i, \quad i_m = j, \quad 1 \leq i_s \leq m$, а элементы $a_{i_s i_{s+1}} > 0$.*

По свойству 7), для каждой пары индексов (i,j) существует натуральное число m такое, что $A_{ij}^m > 0$. Выпишем явное представление данного элемента:

$$A_{ij}^m = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ \cdots \ \sum_{i_{m-1}=1}^{n} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \ \cdots \ a_{i_{m-1} j} > 0.$$

В силу неотрицательности $a_{i_s i_{s+1}}$, найдётся слагаемое строго положительное. Соответствующая ему последовательность индексов $\{i_s\}, \ s = \overline{1, m-1}$, дополненная $i_0 = i, \ i_m = j$ и образует искомую.

Обратно. Пусть указанная последовательность индексов существует для каждой пары индексов (i,j). Предположим, что матрица $A \geq 0$ разложима, т.е. существует изолированное множество S. Выберем индексы (i,j) так, чтобы $i \in S', \ \ j \in S$. Тогда в последовательности $\{i_s\}_{s=0}^m$ для индексов (i,j) найдётся пара индексов $i_k, \ i_{k+1}$ такая, что $i_k \in S', \quad i_{k+1} \in S$. В силу разложимости матрицы $A \geq 0$, элемент $a_{i_k i_{k+1}} = 0$, однако по определению последовательности $\{i_s\}_{s=0}^m$ элемент $a_{i_k i_{k+1}} > 0$. Данное противоречие и доказывает достаточность.

9). *Пусть матрица $A \geq 0$ неразложима, m – натуральное число. Тогда в матрице A^m нет нулевых строк и столбцов.*

Предположим противное. Пусть строка с индексом i нулевая, т.е.

$$A^m_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Представим $A^m = A \cdot A^{m-1}$. Тогда

$$A^m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A^{m-1}_{kj} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Так как матрица A неразложима, то в матрице A, по свойству 1), строка i ненулевая. Следовательно, найдётся индекс k такой, что $a_{ik} > 0$. Тогда $A^{m-1}_{kj} = 0, \quad j = \overline{1, n}$. То есть в матрице A^{m-1} строка с номером k нулевая. Проводя индукцию, получаем, что и в матрице A есть нулевая строка, что противоречит свойству 1).

Заметим, что всякая строго положительная матрица $A > 0$ неразложима. И неотрицательные неразложимые матрицы являются расширением множества строго положительных матриц с сохранением их основных свойств. Легко заметить, если в квадратной матрице $A \geq 0$ порядка n имеется строго меньше, чем $n - 1$ нулевых элементов, то она неразложима. Укажем ряд свойств разложимых матриц, следующих из определения.

1). *Матрица $A \geq 0$ разложима тогда и только тогда, когда разложима матрица A^T.*

На самом деле, если $a_{ij} = 0$, когда $i \in S', \quad j \in S$, где $S \subset N$ – изолированное множество матрицы A, множество $S' = N \setminus S$. Тогда для матрицы A^T в качестве изолированного подмножества будет выступать множество S'. Поэтому из разложимости матрицы A следует разложимость матрицы A^T. Из тех же соображений следует разложимость $A^{TT} = A$ из разложимости A^T.

2). *Матрица $A \geq 0$ разложима тогда, когда существует скаляр $\alpha \geq 0$ и век-*

тор $x \geq 0, \quad x \neq 0$, не все компоненты которого положительны, удовлетворяющие неравенству $Ax \leq \alpha x$.

Обозначим через $S = \{i : \; x_i > 0\}$. Из определения вектора x следует, что множество $S \neq \emptyset$ и $S \neq N$. Из условия $Ax \leq \alpha x$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j \in S} a_{ij} x_j \geq 0$$

при $i \in S' = N \setminus S$. Но тогда $a_{ij} = 0, \; i \in S', \; j \in S$ и S – изолированное множество. Значит матрица A разложима.

4.2 Теорема Фробениуса – Перрона

Установим один из важнейших фактов теории неотрицательных матриц – теорему Фробениуса – Перрона. Этот результат есть проявление свойства неотрицательности матрицы при исследовании её собственных значений.

Теорема 1 (Фробениус – Перрон). *Пусть $A \geq 0$ неразложимая матрица. Тогда матрица A имеет собственное значение λ_A такое, что:*

1) $\lambda_A > 0$;

2) $\lambda_A \geq |\lambda|$ для любого характеристического числа λ матрицы A;

3) собственному значению λ_A отвечает единственный, с точностью до скалярного множителя, собственный вектор $x_A > 0$.

Доказательство. Обозначим через $e = (1, \; 1, \; \cdots, \; 1) \in R^n$. Рассмотрим семейство задач линейного программирования:

$$\min u,$$

$$(A-\lambda E)x \le ue, \quad x^T e = 1, \quad x \ge 0. \tag{4.2}$$

Вектор переменных данной задачи есть $(x,u) = (x_1, \ \cdots, \ x_n, u) \in R^{n+1}$. Скаляр $\lambda \in R^1$ – некоторый параметр.

Обозначим через

$$X = \{x \in R^n : \ x \ge 0, \ x^T e = 1\}.$$

Множество X – стандартный симплекс - замкнутое ограниченное множество. Пусть $u(\lambda)$ – значение задачи линейного программирования (4.2) при фиксированном $\lambda \in R^1$. Тогда, учитывая вид целевой функции и структуру ограничений, значение $u(\lambda)$ задачи (4.2) можно представить в виде:

$$u(\lambda) = \min_{x \in X} \max_{1 \le i \le n} ((A-\lambda E)x)_i.$$

Так как множество индексов $\{1, \ 2, \ \cdots, \ n\}$ конечно, множество X замкнуто и ограниченно, то для каждого $\lambda \in R^1$ значение $u(\lambda)$ конечно. Следовательно, при любом $\lambda \in R^1$ задача (4.2) имеет решение. Покажем, что функция $u(\lambda)$ непрерывна на R^1. Доказательство этого факта разобьём на два этапа. Обозначим

$$f(x,\lambda) = \max_{1 \le i \le n} ((A-\lambda E)x)_i,$$

$$A(x,\lambda) = \arg\max f(x,\lambda) = \{i : \ f(x,\lambda) = ((A-\lambda E)x)_i\}.$$

Пусть $(x^*,\lambda^*) \in X \times R^1$ - произвольная точка. Если $A(x^*,\lambda^*)$ состоит из единственного элемента l, то $f(x^*,\lambda^*) = ((A-\lambda^* E)x^*)_l$ и непрерывность $f(x,\lambda)$ в точке (x^*,λ^*) следует из непрерывности в данной точке функции $((A-\lambda E)x)_l$. Если же

$A(x^*, \lambda^*)$ состоит более чем из одной точки, то для всех $k, l \in A(x^*, \lambda^*)$ имеет место равенство

$$((A - \lambda^* E)x^*)_l = ((A - \lambda^* E)x^*)_k.$$

Тогда, т.к. каждая функция $((A - \lambda E)x)_l, \quad l \in A(x^*, \lambda^*)$ непрерывна в точке (x^*, λ^*), то для любой последовательности $\{(x_s, \lambda_s)\}$ сходящейся к (x^*, λ^*), соответствующие последовательности $\{((A - \lambda_s E)x_s)_l\}, \quad l \in A(x^*, \lambda^*)$ значений функции сходятся к $((A - \lambda^* E)x^*)_l, \quad l \in A(x^*, \lambda^*)$, соответственно. В силу совпадения последних при $l \in A(x^*, \lambda^*)$, получаем непрерывность $f(x, \lambda)$ в точке (x^*, λ^*). А в силу произвольности точки (x^*, λ^*) и на всём множестве $X \times R^1$.

Покажем непрерывность функции

$$u(\lambda) = \min_{x \in X} f(x, \lambda)$$

на R^1. Пусть $\{\lambda_s\}$ - произвольная сходящаяся последовательность и

$$\lambda^* = \lim_{s \to \infty} \lambda_s.$$

Обозначим

$$B(\lambda) = \arg\min_{x \in X} f(x, \lambda) = \{x \in X : \ f(x, \lambda) = u(\lambda)\}.$$

Тогда каждому элементу λ_s последовательности $\{\lambda_s\}$ соответствует множество $B(\lambda_s)$. Выберем из каждого множества $B(\lambda_s)$ произвольным образом элемент x_s. Так как множество X замкнуто и ограничено, то, не уменьшая общности, можно считать, что последовательность $\{x_s\}$ сходится. Обозначим

$$x^* = \lim_{s \to \infty} x_s.$$

Тогда имеем $f(x_s, \lambda_s) \le f(x, \lambda_s)$ для каждого $x \in X$. В силу непрерывности $f(x, \lambda)$ по (x, λ), переходя к пределу, получим

$$\lim_{s\to\infty} f(x_s, \lambda_s) \le \lim_{s\to\infty} f(x, \lambda_s).$$

Так как

$$\lim_{s\to\infty} f(x_s, \lambda_s) = f(x^*, \lambda^*),$$

$$\lim_{s\to\infty} f(x, \lambda_s) = f(x, \lambda^*),$$

то $f(x^*, \lambda^*) \le f(x, \lambda^*)$ для каждого $x \in X$. Следовательно, $f(x^*, \lambda^*) = u(\lambda^*)$.

Тогда из цепочки равенств

$$\lim_{s\to\infty} u(\lambda_s) = \lim_{s\to\infty} f(x_s, \lambda_s) = f(x^*, \lambda^*) = u(\lambda^*)$$

и следует непрерывность функции $u(\lambda)$ в точке λ^* и, в силу произвольности этой точки, на всей числовой прямой R^1.

Покажем, что $u(\lambda)$ монотонно не возрастает на R^1. На самом деле. Пусть $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда для каждого индеса $i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$, каждого $x \in X$ имеет место неравенство

$$((A - \lambda_1 E)x)_i \le ((A - \lambda_2 E)x)_i.$$

Операции нахождения наибольшего и наименьшего значения знака неравенства не меняют. Таким образом, $u(\lambda_1) \le u(\lambda_2)$. Значит функция $u(\lambda)$ монотонно не возрастает на R^1.

Подсчитаем $u(0)$. При $\lambda = 0$ ограничения задачи (4.2) имеют вид: $Ax \le ue$. Так как $x \in X$, то $x \ge 0,\ x \ne 0$. Матрица A неразложима и, следовательно, $Ax \ge 0,\ Ax \ne 0$. Тогда значение $u(0) > 0$.

Найдём $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} u(\lambda)$. Поскольку при фиксированном $x \in X$ для каждого $i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \to +\infty} ((A - \lambda E)x)_i = -\infty,$$

то и

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f(x, \lambda) = -\infty$$

для каждого $x \in X$. Из непрерывности $f(x, \lambda)$, замкнутости и ограниченности множества X следует, что и

$$\lim_{\lambda \to +\infty} u(\lambda) = -\infty.$$

Из данных свойств функции $u(\lambda)$ следует, что существует число λ_A такое, что $u(\lambda_A) = 0$.

Обозначим через x_A вектор, образующий со скаляром $u = 0$ решение $(x_A, 0)$ задачи (4.2) при $\lambda = \lambda_A$. Тогда ограничения данной задачи на решении при $\lambda = \lambda_A$ примут вид:

$$Ax_A \leq \lambda_A x_A, \quad x_A \geq 0, \quad x_A^T e = 1.$$

Из свойства 5) неразложимых матриц следует, что вектор $x_A > 0$.

Рассмотрим семейство задач линейного программирования, двойственных к задаче (4.2):

$$\max v, \tag{4.3}$$

$$p^T(A - \lambda E) \geq ve^T, \quad p \geq 0, \quad p^T e = 1.$$

Здесь $\lambda \in R^1$ – параметр. Переменные этой задачи $(p, v) \in R^{n+1}$.

Из теоремы двойственности для задачи линейного программирования, получаем, что при $\lambda = \lambda_A$ значение двойственной задачи $v(\lambda_A) = u(\lambda_A) = 0$. Обозначим через p_A вектор, образующий со скаляром $v = 0$ решение $(p_A, 0)$ задачи (4.3) при $\lambda = \lambda_A$. Ограничения этой задачи на решении при $\lambda = \lambda_A$ имеют вид:

$$p_A^T A \geq \lambda_A p_A^T, \quad p_A \geq 0, \quad p_A^T = 1.$$

Так как при $\lambda = \lambda_A$ первые n компонент (вектор x_A) решения задачи (4.2) $x_A > 0$, то из условия дополняющей нежёсткости следует, что часть ограничений двойственной задачи (4.3) выполняются как равенства: $p_A^T A = \lambda_A p_A^T$. Используя свойство 5) неразложимых матриц, получаем строгое неравенство: $p_A > 0$. Обратно. Аппелируя к условиям дополняющей нежёсткости, получаем, что при $\lambda = \lambda_A$ на решении задачи (4.2) соответствующие ограничения выполняются как равенства: $Ax_A = \lambda_A x_A$.

Таким образом, вектор $x_A > 0$ есть собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_A. Вектор $p_A > 0$ есть собственный вектор матрицы A^T, отвечающий тому же собственному значению λ_A (другими словами, левый собственный вектор матрицы A, отвечающий λ_A).

Покажем, что с точностью до скалярного множителя, собственный вектор x_A единственный. Предположим противное. Пусть y_A – линейно независимый с x_A собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_A. Определим вектор $z(\alpha)$ следующим образом: $z(\alpha) = x_A + \alpha y_A$. Тогда

$$Az(\alpha) = Ax_A + \alpha A y_A = \lambda_A (x_A + \alpha y_A) = \lambda_A z(\alpha).$$

Значит для каждого $\alpha \in R^1$ вектор $x(\alpha)$ также собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_A.

Подберём скаляр $\alpha \in R^1$ так, чтобы вектор $z(\alpha)$ имел хотя бы одну нулевую компоненту, причём $z(\alpha) \geq 0, \quad z(\alpha) \neq 0$. Так как вектор $x_A > 0$, ограничений на знак α нет, то это всегда возможно. Но тогда из равенства $Az(\alpha) = \lambda_A z(\alpha)$ и свойства 5) неразложимых матриц следует, что $z(\alpha) > 0$, а это противоречит описанной выше процедуре построения вектора $z(\alpha)$. Из данного противоречия и следует единственность, с точностью до скалярного множителя, собственного вектора x_A, отвечающего собственному значению λ_A.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть λ – произвольное характеристическое число матрицы A, z – отвечающий ему собственный вектор, вообще говоря, с комплексными компонентами, такой, что $Az = \lambda z$. Обозначим через $|z|$ вектор с компонентами $|z_i|$:

$$|z| = (|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|).$$

Здесь, если $z_i \in R^1$, то $|z_i|$ - модуль действительного числа, если $z_i \in \mathcal{C}$ – комплексное число, то $|z_i|$ – модуль комплексного числа. Имеем $|Az| = |\lambda z| = |\lambda||z|$. С другой стороны, $|Az| \leq A|z|$. Отсюда и получаем

$$A|z| \geq |\lambda||z|.$$

Умножим последнее неравенство слева на вектор $p_A > 0$:

$$p_A^T A|z| \geq |\lambda| p_A^T |z|.$$

Учитывая, что $p_A^T A|z| = \lambda p_A^T |z|$ и $p_A^T |z| > 0$, получаем $\lambda_A \geq |\lambda|$ для любого характеристического числа λ матрицы A. Теорема доказана.

Число $\lambda_A > 0$ называется числом Фробениуса – Перрона матрицы A или доминирующим собственным значением.

Векторы $x_A > 0, \quad p_A > 0$ называют векторами Фробениуса – Перрона матриц A и A^T, соответственно. Вектор $p_A > 0$ часто называют левым вектором Фробениуса –

Перрона матрицы A (тогда x_A – правый вектор Фробениуса – Перрона).

Впервые факты, утверждаемые теоремой 1, были получены в 1907 году Перроном для положительных матриц. В 1909 – 1912 годах, исследуя спектральные свойства неотрицательных матриц, Фробениус распространил эти результаты на неотрицательные неразложимые матрицы, явившиеся естественным обобщением положительных матриц по части наследования основных свойств.

Если $A \geq 0$ – произвольная неотрицательная матрица, то теорема Фробениуса – Перрона принимает следующий вид.

Теорема 2 (Фробениус – Перрон). *Пусть $A \geq 0$ – неотрицательная матрица. Тогда она имеет собственное значение λ_A такое, что*

1) $\lambda_A \geq 0$;

2) $\lambda_A \geq |\lambda|$ для любого характеристического числа λ матрицы A;

3) собственному значению λ отвечает собственный вектор $x_A \geq 0$.

Очевидны отличия теорем 1 и 2 в пунктах 1) и 3).

Пример 1. Найти доминирующие собственные значения и соответствующие собственные векторы матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1). Характеристическое уравнение:

$$|A_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$. Тогда число Фробениуса – Перрона $\lambda_{A_1} = 2$. Вектор Фробениуса – Перрона находим, решая систему $A_1 x = 2x$. Он есть $x_{A_1} = (1,\ 1) > 0$ и единственный.

2). Характеристическое уравнение:

$$|A_2 - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1$. Тогда $\lambda_{A_2} = 1$. Вектор Фробениуса – Перрона – $x_{A_2} = (1,\ 0) \geq 0$, всего лишь неотрицателен, хотя и единственный.

3) Характеристическое уравнеие:

$$|A_3 - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1$. Тогда $\lambda_{A_3} = 1$. Алгебраическая кратность собственного значения λ_{A_3} равна 2. Нетрудно убедиться, что и геометрическая кратность λ_{A_3} также равна 2. Тогда собственному значению λ_{A_3} отвечают два линейно независимых собственных вектора $x^{(1)}_{A_3} = (1,\ 0,\ 0)$ и $x^{(2)}_{A_3} = (0,\ 1,\ 0)$. В данном примере имеет место не только неотрицательность (вместо строгой положительности, как в матрице A_1) числа λ_{A_3}, но и неединственность векторов Фробениуса – Перрона.

Легко заметить, что матрицы A_2 и A_3 разложимы.

4.3 Оценка числа Фробениуса – Перрона

Число Фробениуса – Перрона – собственное значение матрицы $A \geq 0$. Отыскание собственных значений – задача, общем случае, достаточно сложная. Однако для неотрицательных матриц можно указать достаточно простые и эффективные оценки для числа Фробениуса – Перрона λ_A.

Обозначим через r_i – сумму элементов i – ой строки, s_j – сумму элементов j – го столбца:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \qquad s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Пусть

$$r = \min_{1 \le i \le n} r_i, \qquad R = \max_{1 \le i \le n} r_i,$$

$$s = \min_{1 \le j \le n} s_j, \qquad S = \max_{1 \le j \le n} s_j.$$

Теорема 1. *Для произвольной матрицы $A \ge 0$ имеют место неравенства:*

$$r \le \lambda_A \le R, \qquad s \le \lambda_A \le S.$$

Если матрица A неразложима, то все неравенства строгие, за исключением случая, когда $r = R, \quad s = S$.

Доказательство. Выберем вектор Фробениуса – Перрона x_A таким, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} (x_A)_i = 1$$

.

Тогда, выписав равенство $Ax_A = \lambda_A x_A$ покомпонентно, получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_A)_j = \lambda_A (x_A)_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Просуммируем эти равенства по индексу i:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_A)_j = \sum_{j=1}^{n}(x_A)_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} s_j(x_A)_j.$$

Таким образом,

$$\lambda_A = \sum_{j=1}^{n} s_j(x_A)_j.$$

Заменяя в последнем равенстве все s_j на s, либо на S, получим оценки для числа Фробениуса – Перрона:

$$s \leq \lambda_A \leq S.$$

Для строчных сумм доказательство аналогично с использованием вектора p_A.

Если матрица $A \geq 0$ – неразложима, то, с одной стороны, $\lambda_A > 0, \quad x_A > 0,$ $p_A > 0$, с другой – в матрице A нет нулевых строк и столбцов. Тогда, исключая случаи $s = S, \quad r = R$, вышеприведённые оценки становятся строгими. Теорема доказана.

Величина числа λ_A полностью определяет продуктивность модели Леонтьева.

Теорема 2. *Модель Леонтьева (3.2) продуктивна тогда и только тогда, когда* $\lambda_A < 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть модель Леонтьева (3.2) продуктивна. Выберем вектор конечного спроса c строго положительным: $c > 0$. Тогда существует вектор $x > 0$ – решение системы (3.2), т.е. $x - Ax = c$.

Отсюда следует, что $x > Ax$. Умножим это неравенство слева на левый вектор Фробениуса – Перрона $p_A \geq 0$, получим $p_A^T x > p_A^T Ax = \lambda_A p_A^T x$. Поскольку вектор $x > 0$, то $p_A^T > 0$. Отсюда и вытекает $\lambda_A < 1$.

Достаточность. Из определения собственного значения и собственного вектора имеем $Ax_A = \lambda_A x_A$. Отсюда следует

$$A^k x_A = \lambda_A^k x_A.$$

Перейдём к пределу в последнем соотношении, учитывая, что $\lambda_A < 1$, получим

$$\lim_{k\to\infty} A^k x_A = \lim_{k\to\infty} \lambda_A^k x_A = 0 \in R^n.$$

Поскольку $\lambda_A \geq |\lambda|$ для любого характеристического числа λ матрицы A, то

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0.$$

Здесь 0 – нулевая квадратная матрица порядка n. Рассмотрим равенство:

$$(E - A)(E + A + \ \cdots\ + A^{k-1}) = E - A^k.$$

Перейдём в нём к пределу при $k \to \infty$.

$$(E - A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = E.$$

Здесь $A^0 = E$. Очевидно, что имеет место и равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k (E - A) = E$$

.

Отсюда следует, что матричный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится и

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (E - A)^{-1}. \tag{4.4}$$

Другими словами, матрица $E - A$ обратима. Поскольку матрицы $A^k \geq 0,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, то матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$ - неотрицательна. Следовательно, модель Леонтьева (4.2) продуктивна и $x = (E - A)^{-1}c$. Теорема доказана.

Из продуктивности и соотношения (4.4) следует, что вектор валового выпуска x, отвечающий конечному спросу c можно представить в виде:

$$x = (E - A)^{-1}c = c + Ac + A^2c + \ \cdots. \tag{4.5}$$

Данное соотношение допускает интересную экономическую интерпретацию. Для того, чтобы удовлетворить конечный заданный спрос c, его необходимо просто произвести. Этому соответствует первое слагаемое в правой части равенства (4.5). Но этого мало. В процессе производства спроса c возникают затраты, которые описываются слагаемым Ac в (4.5) и которые также надо произвести. При производстве затрат Ac вновь возникают дополнительные затраты, описываемые слагаемым A^2c и так далее. Как показано, в продуктивной модели Леонтьева $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, т.е. с ростом индекса k, дополнительные издержки уменьшаются.

Матрица $(E-A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*. Вектор $x = (E-A)^{-1}c$ – *вектором полных затрат* для производства вектора конечного спроса c.

Пример 1. Продуктивна ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} ?$$

Характеристическое уравнение матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 0.2-\lambda & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.3-\lambda & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.2-\lambda \end{vmatrix} = (0.2-\lambda)(\lambda^2 - 0.5\lambda) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 0.2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0.5$. Число Фробениуса – Перрона $\lambda_A = 0.5 < 1$. Значит матрица A продуктивна.

Пример 2. При каких значениях параметра a матрица

$$A = a\begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

продуктивна?

Характеристическое уравнение матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 0.4a - \lambda & 0 & 0.2a \\ 0.3a & 0.3a - \lambda & 0.5a \\ 0.1a & 0 & 0.3a - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (0.3a - \lambda)(\lambda^2 - 0.7a\lambda + 0.1a^2).$$

Его корни $\lambda_1 = 0.3a,\ \lambda_2 = 0.2a,\ \lambda_3 = 0.5a$. Решая систему из трёх неравенств $\lambda_i < 1,\ i = \overline{1,3}$, получаем $a < 2$. С учётом ограничений на неотрицательность элементов матрицы A, параметр $a \in [0, 2)$.

Следствие (Брауэр – Солоу). *Если все $r_i < 1,\ i = \overline{1,n}$ ($s_j < 1,\ j = \overline{1,n}$), то модель Леонтьева продуктивна.*

Если от матрицы A потребовать неразложимости, то условия данного следствия можно ослабить.

Теорема 3. *Если матрица $A \geq 0$ неразложима, $r_i \leq 1,\ i = \overline{1,n}$ и хотя бы для одного индекса j неравенство строгое $r_j < 1$, то модель Леонтьева продуктивна.*

Доказательство. Обозначим через $e = (1,\ \cdots,\ 1)^T \in R^n$. Тогда

$$Ae = (r_1,\ \cdots,\ r_n)^T = r^T.$$

Пусть p_A – левый вектор Фробениуса – Перрона матрицы A. Распишем разными способами билинейную форму $p_A^T Ae$:

$$p_A^T A e = \lambda_A p_A^T e = \lambda_A \sum_{i=1}^{n} (p_A)_i,$$

$$p_A^T A e = p_A' r = \sum_{i=1}^{n} r_i (p_A)_i < \sum_{i=1}^{n} (p_A)_i.$$

Строгое неравенство следует из того, что $p_A > 0$ в силу неразложимости матрицы A и условий теоремы. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} (p_A)_i > \lambda_A \sum_{i=1}^{n} (p_A)_i.$$

Отсюда вытекает $\lambda_A < 1$ и, в силу теоремы 2, модель Леонтьева продуктивна. Теорема доказана.

Отметим, что условия теоремы 3 не являются необходимыми.

Пример 3. Исследовать на продуктивность матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 4 \\ 0.01 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица $A > 0$, то она неразложима. Её характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 0.6 - \lambda & 4 \\ 0.01 & 0.6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.32 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.4$. Число Фробениуса – Перрона этой матрицы $\lambda_A = 0.8 < 1$. Значит матрица A продуктивна. Однако у этой матрицы $r_1 = 4.6 > 1$.

С другой стороны, условия теоремы 3 нельзя также и ослабить.

Пример 4. Неразложимая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

имеет и строчные и столбцовые суммы элементов равные единице. Однако число Фробениуса – Перрона этой матрицы $\lambda_A = 1$ и, значит, она не продуктивна.

4.4 Модель равновесных цен

Рассмотрим модель, двойственную к модели Леонтьева (4.2) – модель равновесных цен. Двойственные модели важны не только математически, но и с точки зрения экономики. Они характеризуют различные вопросы о ценах на товары. Определим двойственную модель.

Пусть $p \in R^n, \quad p \geq 0$ – вектор цен на товары. Его компоненты $p_i \geq 0$ – цены единицы продукции i – ой отрасли. Пусть, как и прежде, A – матрица затрат. Если $x \geq 0$ – вектор валового выпуска, то i – ая отрасль получит доход $p_i x_i$. Часть своего дохода отрасль i потратит на закупку продукции других отраслей. А именно, для выпуска единицы своей продукции ей необходима продукция первой отрасли в объёме a_{1i}, второй отрасли в объёме a_{2i}, n – ой отрасли в объёме a_{ni}. На покупку этой продукции i –ой отраслью будет затраченна сумма $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} p_j$. Тогда для выпуска продукции в объёме x_i i – ой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную

$$x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} p_j.$$

Оставшуюся от дохода $p_i x_i$ часть, называемую добавленной стоимостью (чистым доходом), обозначим V_i. Эта часть дохода может использоваться на личное потребление, выплату зарплаты, налогов, инвестиции. Таким образом, имеем соотношение:

$$x_i p_i = x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} p_j + V_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Разделив это равенство на $x_i \neq 0$, получим

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} p_j + v_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь $v_i = \dfrac{V_i}{x_i}$ – норма добавленной стоимости, т.е. величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции. Запишем последние соотношения в векторно – матричном виде:

$$p^T = p^T A + v^T,$$

где $v^T = (v_1, \cdots, v_n)^T$ – вектор норм добавленной стоимости. Транспонируя последнее равенство, получим

$$p = A^T p + v.$$

Данное соотношение и называют моделью равновесных цен. Модель равновесных цен позволяет по заданным величинам норм добавленной стоимости рассчитать цены на продукцию отраслей. Её также часто используют для прогноза изменения цен, вызванного изменением цены на продукцию некоторых отраслей.

Двойственная модель, с математической точки зрения, имеет ту же структуру, что и исходная модель Леонтьева. Разрешимость модели Леонтьева в неотрицательных величинах $x \geq 0$ означает продуктивность модели Леонтьева. Разрешимость в неотрицательных величинах $p \geq 0$ двойственной модели означает *прибыльность* этой модели. Матрицы исходной и двойственной моделей отличаются друг от друга операцией транспонирования. В силу этого, рассмотренные выше свойства модели Леонтьева переносятся и на модель равновесных цен. Так, например, условия продуктивности превращаются в условия прибыльности. Числа Фробениуса – Перрона матриц A и A^T совпадают. Левый вектор Фробениуса – Перрона p_A матрицы A есть правый вектор Фробениуса – Перрона матрицы A^T.

Пример 1. По заданной технологической матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

и вектору норм добавленной стоимости $v^{(1)} = (10,\ 20,\ 30)^T$ рассчитать равновесные цены и вычислить их изменение при увеличении нормы добавленной стоимости в первой отрасли в два раза и таком же её уменьшении во второй отрасли.

Равновесные цены, как и в модели Леонтьева, вычислим по формуле

$$p = (E - A^T)^{-1} v.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$(E - A^T)^{-1} = \frac{1}{0.214} \begin{pmatrix} 0.52 & 0.18 & 0.37 \\ 0.32 & 0.44 & 0.31 \\ 0.34 & 0.2 & 0.53 \end{pmatrix}.$$

Тогда равновесные цены, отвечающие вектору норм добавленной стоимости $v^{(1)} = (10,\ 20,\ 30)$ будут:

$$p^{(1)} = (E - A^T)^{-1} v^{(1)} = \frac{1}{0.214} \begin{pmatrix} 19.9 \\ 21.3 \\ 23.3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 92.99 \\ 99.53 \\ 108.88 \end{pmatrix}.$$

Если же вектор норм добавленной стоимости изменить, как указано, то он будет $v^{(2)} = (20,\ 10,\ 30)$. Ему отвечают равновесные цены

$$p^{(2)} = (E - A^T)^{-1} v^{(2)} = \frac{1}{0.214} \begin{pmatrix} 23.3 \\ 20.1 \\ 24.7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 108.88 \\ 93.93 \\ 115.42 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, цены на продукцию первой отрасли вырастут на 17.09 процентов, второй – понизятся на 5.63 процента, третьей – вырастут на 6.01 процента.

4.5 Влияние конечного спроса на модель Леонтьева

Рассмотрим реакцию модели Лентьева на изменение некоторых параметров, в частности, вектора конечного спроса $c \geq 0$.

Предположим, что спрос на первый товар изменился при неизменном спросе на все остальные товары. Что произойдёт с вектором валового выпуска x?

Обозначим через $c^{(1)} \geq 0$ и $c^{(2)} \geq 0$ векторы с компонентами $c_1^{(1)} > c_1^{(2)}$, $c_i^{(1)} = c_i^{(2)}$, $i = \overline{2, n}$. Через $x^{(1)} \geq 0$, $x^{(2)} \geq 0$ - соотвествующие, в силу уравнения (5.2), решения системы линейных уравнений.

Теорема 1. *Пусть матрица $A \geq 0$, неразложима и продуктивна. Тогда*

$$\frac{x_1^{(1)}}{x_1^{(2)}} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i^{(1)}}{x_i^{(2)}}.$$

Причём, если максимум достигается и при других значениях индекса i, то $c_i^{(1)} = c_i^{(2)} = 0$.

Доказательство. Поскольку матрица A неразложима, то для каждой пары индексов (i, j) существует число m такое, что $A_{ij}^m = 0$. Тогда из соотношения (4.4) следует, что матрица $(E-A)^{-1} > 0$ – строго положительна. Значит, если $c^{(1)} \geq c^{(2)}$ и для одной компоненты это неравенство выполняется как строгое, то $x^{(1)} > x^{(2)} > 0$.

Обозначим через $b_i > 1$ коэффициенты, такие что $x_i^{(1)} = b_i x_i^{(2)}, \quad i = \overline{1,n}$. Отсюда

$$x_i^{(2)} = \frac{1}{b_i} x_i^{(1)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Подставляя данное соотношение в модель Леонтьева (4.1)

$$x_i^{(2)} = c_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(2)},$$

получим

$$\frac{1}{b_i} x_i^{(1)} = c_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{1}{b_j} x_j^{(1)}.$$

Домножив обе части данного равенства на b_i, получим представление для $x_i^{(1)}$:

$$x_i^{(1)} = b_i c_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{b_i}{b_j} x_j^{(1)}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.6}$$

Поскольку $b_i = \dfrac{x_i^{(1)}}{x_i^{(2)}}$, то при индексах $(i,\ j)$ таких, что

$$i \in S = \{i: \ b_i = \max_{1 \leq j \leq n} b_j\}, \quad j \notin S$$

всегда имеет место $\dfrac{b_i}{b_j} > 1$.

Далее, так как $c_i^{(1)} = c_i^{(2)}, \quad i \geq 2$, то

$$b_i c_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{b_i}{b_j} x_j^{(1)} \geq c_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^{(1)} \tag{4.7}$$

при $i \geq 2$. Причём, если при $i \in S, \quad i \geq 2, \quad j \notin S$ среди чисел $c_i^{(1)}, \quad a_{ij}$ найдутся отличные от нуля, то последнее неравенство (4.7) превращается в строгое. А это эквивалентно тому, что $x_i^{(2)} > x_i^{(2)}, \quad i \in S, \quad i \geq 2$. Данное противоречие исчезает, если $c_i^{(1)} = c_i^{(2)} = 0, \quad i \in S, \quad i \geq 2$ и $a_{ij} = 0, \quad i \in S, \quad j \notin S$. Но последнее условие невозможно, в силу неразложимости матрицы A. Поэтому, если $i \in S, \quad i \geq 2$, то отсюда следует $c_i^{(1)} = c_i^{(2)} = 0$.

При $i = 1 \in S$, в силу $c_1^{(1)} > c_1^{(2)}$, соотношение (4.7) превращается в неравенство

$$x_1^{(1)} > c_1^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(1)} + c_1^{(1)} - c_1^{(1)} = x_1^{(1)} - (c_1^{(1)} - c_1^{(2)})$$

вполне естественное, без противоречий. Теорема доказана.

Определение 1. *Эластичностью выпуска продукта i по отношению к спросу на продукт j называют величину*

$$E_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial c_j} \cdot \frac{c_j}{x_i}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Коэффициент эластичности E_{ij} приближённо показывает, на сколько процентов изменится выпуск товара i при изменении спроса на товар j на один процент.

Теорема 2. *Если матрица $A \geq 0$ неразложима и продуктивна, то $E_{ij} \leq 1$.*

Доказательство. Докажем теорему для E_{i1}. Пусть векторы $c^{(1)}, \quad c^{(2)}$ те же, что и в теореме 1, b_i – соотвествующие коэффициенты пропорциональности из теоремы 1. Обозначим через $h_1 > 1$ коэффициент такой, что $c_1^{(1)} = h_1 c_1^{(2)}$. Рассмотрим разностный аналог коэффициента эластичности:

$$\frac{x_i^{(1)} - x_i^{(2)}}{c_1^{(1)} - c_1^{(2)}} \cdot \frac{c_1^{(2)}}{x_i^{(2)}} = \frac{b_i - 1}{h_1 - 1}. \tag{4.8}$$

Поскольку $b_1 \geq b_i, \quad i = \overline{2, n}$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $\dfrac{b_1 - 1}{h_1 - 1} \leq 1$.

Положим в (4.8) $i = 1$ и, учитывая, что $\dfrac{b_1}{b_j} \geq 1, \quad j = \overline{2, n}$, получим

$$x_1^{(1)} \geq \frac{b_1}{h_1} c_1^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(1)} = \frac{b_1}{h_1} c_1^{(1)} + x_1^{(1)} - c_1^{(1)}$$

или $c_1^{(1)} \geq \dfrac{b_1}{h_1} c_1^{(1)}$.

Поскольку $c_1^{(1)} > 0$, то $b_1 \leq h_1$. Отсюда и получаем

$$\frac{b_1 - 1}{h_1 - 1} \leq 1.$$

Переходя к пределу при $c_1^{(1)} \to c_1^{(2)}$ в соотношении (4.8) и получаем $E_{i1} \leq 1$. Теорема доказана.

Пример. Для модели Леонтьева, определяемой матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

вычислить коэффициенты эластичности при $c = (2,\ 3)^T$.

Матрица $A > 0$ и значит неразложимая. Убедимся в её продуктивности, вычислив $(E - A)^{-1}$:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0.36} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix} > 0.$$

Вектор валового выпуска $x = (E - A)^{-1}c = (\dfrac{3}{0.36},\ \dfrac{3.1}{0.36})^T$.

Найдём частные производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial c_j}$, продифференцировав равенство $x = (E-A)^{-1}c$ в точке $(2,\ 3)$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial c_j} = (E - A)^{-1}_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда коэффициенты эластичности будут:

$$E_{11} = \frac{0.8}{0.36} \cdot \frac{2 \cdot 0.36}{3} = \frac{1.6}{3} \approx 0.53, \qquad E_{12} = \frac{0.4}{0.36} \cdot \frac{3 \cdot 0.36}{3} = 0.4,$$

$$E_{21} = \frac{0.5}{0.36} \cdot \frac{2 \cdot 0.36}{3} = \frac{1}{3.1} \approx 0.32, \qquad E_{22} = \frac{0.7}{0.36} \cdot \frac{3 \cdot 0.36}{3.1} = \frac{2.1}{3.1} \approx 0.68.$$

4.6 Примитивные матрицы

В неразложимой модели Леонтьева все отрасли вместе образуют неразделимую группу производств, связанных между собой посредством взаимных поставок продуктов. Однако неразложимость не означает наличия прямой, непосредственной связи между двумя отраслями. Допускается возможность того, что какие – нибудь отрасли окажутся связанными с некоторыми другими отраслями косвенно, посредством промежуточных связей. Фактически, рассмотренные свойства неразложимых матриц и следуют из наличия таких связей. Выделим из всех неразложимых матриц те, которые характеризуются целым положительным числом k таким, что матрица $A^k > 0$ – строго положительна. Очевидно, что положительные матрицы принадлежат этому классу. Какие ещё неразложимые матрицы $A \geq 0$ содержатся в нём? Это важно знать, поскольку матрицам данного класса присущи специальные динамические свойства, т.е. свойства поведения последовательности $\{A^k\}$ – степеней матрицы A. С этим уже сталкивались, изучая продуктивность модели Леонтьева (матрица полных затрат).

Пусть $A \geq 0$ - неразложимая матрица. Сопоставим ей матрицу $\overline{A} = \dfrac{1}{\lambda_A} A$. Очевидно, что $\overline{A}$ - неразложимая матрица и $\lambda_{\overline{A}} = 1$. Векторы Фробениуса – Перрона матрицы $\overline{A}$ совпадают с векторами $x_A,\ p_A$ матрицы A. Поведение последовательности матриц $\{\overline{A}^k\}$, вообще говоря, имеет колебательный характер. Однако, поведение указанного выше подкласса неразложимых матриц, степени которых строго положительны, характеризуется отсутствием таких колебаний.

Определение 1. *Неразложимую матрицу $A \geq 0$ будем называть устойчивой, если для любого вектора x, последовательность $\{\overline{A}^k x\}$ сходится.*

Не всякая неразложимая матрица устойчива.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$. Тогда $\lambda_A = 1$ и $A = \overline{A}$. Степени матрицы A вычисляются непосредственно:

$$A^k = \begin{cases} A, & k - \text{нечётное;} \\ E, & k - \text{чётное.} \end{cases}$$

Тогда

$$A^k x = \begin{cases} (x_2,\ x_1)^T, & k - \text{нечётное;} \\ (x_1,\ x_2)^T, & k - \text{чётное.} \end{cases}$$

Очевидно, что никакой сходимости нет.

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A есть:

$$\lambda^3 - 1 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2/3} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Число $\lambda_A = 1$. В данном случае также $A = \overline{A}$. Вычислим степени матрицы A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$A^4 = A, \quad A^5 = A^2$ и так далее.

Умножая вектор $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)^T$ на степени матрицы A, получим

$$Ax = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A^2x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad A^3x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x$$

и так далее. Сходимости также нет. Однако хорошо прослеживается колебательный характер поведения.

В последовательности матриц $\{A^k\}$, в примере 1, строки просто меняются местами с изменением показателя степени k на единицу. Во втором примере, при увеличении степени k на единицу, третья строка ставится на место первой, а первая и вторая сдвигаются вниз на одно место. Такое поведение последовательности матриц $\{A^k\}$ и отражается на поведении последовательности векторов $\{A^kx\}$. Оказывается, что подобное колебательное поведение не случайно. Если матрица A неустойчива, то эта неустойчивость именно такого типа.

Определение 2. *Неразложимая матрица $A \geq 0$ называется импримитивной (циклической), если множество $N = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ можно разбить на m непересекающихся подмножеств $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_m$ так, что если $a_{ij} > 0,\ i \in S_r,\ r \geq 2$, то $j \in S_{r-1}$; при $i \in S_1,\ j \in S_m$.*

После перенумерации индексов, что соответствует одновременной перестановке строк и столбцов матрицы A, импримитивную матрицу можно привести к виду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_m \\ A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{m-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Данный вид матрицы A называется циклическим представлением. Остальные неразложимые матрицы называются *примитивными*. Для неразложимых неотрицательных матриц свойства устойчивости и примитивности эквивалентны. Таким образом, изучение устойчивости и примитивности неразложимой матрицы A эквивалентно изучению сходимости последовательности $\{\overline{A}^k\} = \{(\frac{1}{\lambda_A}A)^k\}$. Заметим, что в примерах 1 и 2, матрицы A уже были записаны в виде своего циклического представления.

Совокупность подмножеств $\{S_i\},\ i = \overline{1,m}$ из определения 2 называется циклическим разложением. Если матрица импримитивна, то все отрасли можно разбить на подгруппы отраслей, которые обнаруживают взаимосвязь циклического типа в следующем смысле. Отрасли из группы S_r используют для производства продукцию отраслей из группы $S_{r+1},\ r = \overline{1, m-1}$, а отрасли из группы S_m – продукцию группы S_1. Далее, если модель Леонтьева с одной и той же импримитивной матрицей A применять в течение нескольких периодов времени, то происходит следующая картина. Указанная выше схема взаимного использования продукции сохраняется, но происходит последовательное перемещение из одной группы в другую результатов деятельности. Другими словами, группа S_r использует продукцию группы S_{r+1}, которая была получена на предыдущем этапе из продукции группы S_{r+2}, которая, в свою очередь, ещё раньше была получена из продукции группы S_{r+3} и т.д.. Таким образом, спустя некоторое количество периодов времени, отрасли из группы S_r будут использовать для производства результат преобразования своей же собственной продукции, последовательно прошедшей через все остальные группы отраслей. Именно о такой неустойчивости и говорит импримитивность.

Теорема 1. *Для того, чтобы неразложимая матрица $A \geq 0$ была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы существовал предел*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{A}^k = B.$$

Доказательство. Небходимость. Пусть матрица A устойчива. Обозначим через $e^{(i)} \in R^n$ i – ый орт пространства R^n. Тогда для каждого $i = \overline{1,n}$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \overline{A}^k e^{(i)} = \lim_{k\to\infty} \overline{A}_i^k = B_i \in R^n,$$

здесь $\overline{A}_i^k$ – i – ый столбец матрицы $\overline{A}^k$. Обозначив через B матрицу, столбцами которой служат векторы $B_i,\ i = \overline{1,n}$, доказываем необходимость.

Достаточность. Если существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \overline{A}^k = B,$$

то для каждого $x \in R^n$ существует и предел

$$\lim_{k\to\infty} \overline{A}^k x = Bx.$$

Значит матрица A устойчива. Теорема доказана.

В силу той большой роли, которую играют понятия устойчивости или неустойчивости при исследовании динамических вариантов модели Леонтьева, остановимся на них подробнее, приводя без доказательства ряд фактов их характеризующих. Первоначально понятия примитивности – импримитивности были введены Фробениусом в 1912 году.

Устойчивость (примитивность) неразложимой матрицы можно охарактеризовать с помощью собственных значений матрицы. Напомним, если $A \geq 0$ и неразложима, то из теоремы Фробениуса – Перрона следует, что число λ_A есть простой корень характеристического уравнения (алгебраическая и, следовательно, геометрическая кратность этого корня равна единице). Если же матрица $A > 0$ – строго положительна, то можно утверждать больше. Как показал в 1907 году Перрон, характеристических чисел с модулем равным λ_A просто нет. Всегда имеет место неравенство $\lambda_A > |\lambda|$ для любого характеристического числа λ строго положительной матрицы $A > 0$. Если же $A \geq 0$ – произвольная неотрицательная неразложимая матрица, то этого утверждать уже нельзя, вообще говоря, имеет место неравенство $\lambda_A \geq |\lambda|$. Например, все характеристические числа матриц из примеров 1 и 2 имеют один и то же модуль, равный числу Фробениуса – Перрона $\lambda_A = 1$. Напомним, обе эти матрицы были неустойчивыми (импримитивными).

Пусть $A \geq 0$ – неразложимая матрица, $\{\lambda_i\}$, $i = \overline{1,n}$ – её характеристические числа, λ_A – число Фробениуса - Перрона. Пусть k – число собственных значений, имеющих максимальный модуль: $|\lambda_s| = \lambda_A$, $s = \overline{1,k}$, $k \leq n$. Тогда матрица $A \geq 0$ примитивная, если $k = 1$ и импримитивная, если $k > 1$. Число $k > 1$ называется *индексом импримитивности* матрицы A.

На практике, представляет интерес вопрос о проверке примитивности для заданной матрицы. Оказывается, это можно сделать. Исследование этого вопроса и связано с исследованием поведения последовательности матриц $\{A^k\}$.

Теорема 2. *Пусть $A \geq 0$ – неразложимая матрица. Тогда A примитивна тогда и только тогда, когда $A^m > 0$ для некоторого m.*

Данная теорема хорошо характеризует примитивность, но она не указывает никакой верхней оценки для степеней, требующих вычисления. Если найдено m такое, что $A^m > 0$, то матрица A примитивна. Однако когда следует остановиться, если необходимая степень ещё не получена? Следующая теорема указывает конечную оценку для показателей степени.

Теорема 3. *Пусть $A \geq 0$ – неразложимая матрица. Если A примитивна, то $A^k > 0$ для некоторого положительного числа $k < (n-1)n^n$.*

Для примитивной матрицы A наименьшее целое положительное число k такое, что $A^k > 0$, называется *индесом примитивности.* В 1950 году Виландт указал точную верхнюю оценку индекса примитивности для произвольной примитивной матрицы.

Теорема 4 (Виландт). *Пусть $A \geq 0$ – неразложимая матрица. Тогда A примитивна тогда и только тогда, когда $A^{n^2-2n+2} > 0$.*

Виландт же привёл пример, показывающий невозможность улучшить оценку $n^2 - 2n+2$ для класса матриц, в которых все диагональные элементы нулевые:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если же некоторые элементы диагонали положительны, то результат Виландта можно улучшить.

Теорема 5 (Холидей, Варга). *Пусть матрица $A \geq 0$ и имеет d положительных элементов на главной диагонали: $1 \leq d \leq n$. Тогда $A^{2n-d-1} > 0$.*

Осюда следует важный вывод: если в неразложимой матрице $A \geq 0$ хотя бы один диагональный элемент положителен, то матрица является примитивной. Если же положительна вся главная диагональ, то верхняя оценка индекса примитивности наименьшая.

Следствие. *Если $A \geq 0$ – неразложимая матрица и все её диагональные эле-*

менты положительны, то $A^{n-1} > 0$.

Данному утверждению можно дать прямое доказательство, без аппеляции к теореме 5.

Доказательство. Обозначим

$$\alpha = \min\{a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}\}, \quad B = A - diag(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}).$$

Очевидно, что $\alpha > 0, \quad B \geq 0$ – неразложимая матрица, так как неразложима матрица A. Тогда

$$A \geq B + \alpha E = \alpha(E + \frac{1}{\alpha}B).$$

Отсюда следует

$$A^{n-1} \geq \alpha^{n-1}(E + \frac{1}{\alpha}B)^{n-1}.$$

Поскольку матрица $\frac{1}{\alpha}B$ неразложима, то по свойству неразложимых матриц матрица $(E + \frac{1}{\alpha}B)^{n-1} > 0$. Отсюда и следует, что матрица $A^{n-1} > 0$. Следствие доказано.

Отметим, что неразложимая матрица может иметь разложимую степень. Так в примере 1 разложимы чётные степени матрицы A. В примере 2 разложимы степени, кратные трём. Однако степени любой примитивной матрицы всегда примитивны.

Теорема 6. *Пусть* $A \geq 0$ *неразложимая примитивная матрица. Тогда матрица* $A^k \geq 0$ *неразложима и примитивна для всех* $k = 1,\ 2,\ \cdots$.

Доказательство. Поскольку матрица A примитивна, то все достаточно большие степени матрицы A строго положительны. Это же верно и для матрицы A^k при любом индексе k. Если A^k разложима для некоторого k, то и все степени матрицы A^k будут разложимыми, что противоречит тому, что достаточно большие степени матрицы A строго положительны и, следовательно, не могут быть разложимыми. Теорема доказана.

В теореме 1 утверждается, что необходимым и достаточным условием устойчивости матрицы является существование предела последовательности матриц $\{\overline{A}^k\}$. Так вот, если этот предел существует, то можно указать чему он равен.

Теорема 7. *Если $A \geq 0$ неразложима и примитивна, то*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{A}^k = \lim_{k\to\infty} (\frac{1}{\lambda_A} A)^k = L > 0,$$

где матрица $L = x_A p_A^T$, x_A, p_A – правый и левый векторы Фробениуса – Перрона матрицы A, нормированные условием $x_A^T p_A = 1$.

Напомним, что $x_A > 0$, $p_A > 0$ и $Ax_A = \lambda_A x_A$, $p_A^T A = \lambda_A p_A^T$. Первоначально данная теорема была установлена Перроном для положительных матриц. Введение Фробениусом понятия примитивности позволило эту теорему перенести в точно таком же виде на класс примитивных матриц. Отметим ряд интересных свойств матрицы $L = x_A p_A^T$, где $x_A^T p_A = 1$.

$$1)\ Lx_A = x_A, \quad p_A^T L = p_A^T.$$

$$2)\ L^m = L, \ \ m = 1,\ 2,\ \cdots.$$

$$3)\ A^m L = LA^m = \lambda_A^m L, \ \ m = 1,\ 2,\ \cdots.$$

$$4)\ L(A - \lambda_A L) = 0.$$

$$5)\ (A - \lambda_A L)^m = A^m - \lambda_A^m L, \ \ m = 1,\ 2,\ \cdots.$$

Докажем последнее свойство:

$$(A - \lambda_A L)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i A^i \lambda_A^{m-i} L^{m-i} (-1)^{m-i} =$$

$$= A^m + \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i A^i \lambda_A^{m-i} L (-1)^{m-i} = A^m + \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i \lambda_A^i \lambda_A^{m-i} L (-1)^{m-i} =$$

$$= A^m + \lambda_A^m L \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i (-1)^{m-i}.$$

Здесь C_m^i - биномиальные коэффициенты, Во время преобразований воспользовались свойствами 2) и 3) матрицы L. Рассмотрим бином:

$$f(x, y) = (x - y)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i x^{m-i} y^i (-1)^i.$$

Подсчитаем его при $x = y$.

$$f(x, x) = 0 = x^m \sum_{i=0}^{m} C_m^i (-1)^i.$$

Отсюда и получаем $\sum\limits_{i=0}^{m} C_m^i (-1)^i = 0$.
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} C_m^i (-1)^i = -1$.
Ну, а раз так, то

$$(A - \lambda_A L)^m = A^m - \lambda_A^m L, \quad m = 1, \ 2, \ \cdots.$$

Свойство доказано.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{k \to \infty} \overline{A}^k$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица строго положительна, то она неразложима, а раз на диагонали присутствуют ненулевые элементы, то она примитивна. Собственные значения данной матрицы $\lambda_1 = \frac{1}{6},\ \lambda_2 = \frac{5}{6}$. Тогда $\lambda_A = \frac{5}{6}$. Правый собственный вектор, отвечающий λ_A, есть $x_A = (\alpha,\ \alpha)^T,\ \alpha > 0$. Левый собственный вектор, отвечающий λ_A – это $p_A = (\beta,\ \beta)^T,\ \beta > 0$.

Пронормируем их условием $x_A^T p_A = 1: \quad 2\alpha\beta = 1$. Тогда $\alpha\beta = \dfrac{1}{2}$, где $\alpha,\ \beta$ – любые положительные величины.

Вычислим предельную матрицу L:

$$L = x_A y_A^T = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Учитывая соотношение между α и β, получим

$$\lim_{k\to\infty} (\frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix})^k = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

4.7 Магистраль в модели Леонтьева

Рассмотрим одну экстремальную задачу для динамического варианта модели Леонтьева и выявим интересное свойство оптимальных траекторий этой задачи.

Пусть экономическая система функционирует в течение T периодов времени. В каждый период $[t-1, t],\ t = \overline{1, T}$ валовый выпуск $x(t) \in R^n$ этого периода и только он может быть использован как запас сырья для производства в периоде $[t, t+1]$. Пусть $x(0) = x_0 \in R^n$ - начальный запас товаров. Обозначим через $q \in R^n,\ q \geq 0$ вектор цен на продукцию в последний период времени. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\max q^T x(T), \tag{4.9}$$

$$Ax(t) \leq x(t-1), \quad x(t) \geq 0, \quad t = \overline{1,T}. \tag{4.10}$$

Таким образом, требуется найти такую последовательность векторов $\{x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(T)\}$, которая удовлетворяла бы соотношениям (4.10) и, при этом, максимизировала стоимость набора продукции выпущенной в последнем периоде $[T-1, T]$. Последовательность векторов $\{x(t)\},\ t = \overline{1,T}$, удовлетворяющую соотношениям (4.10) будем называть *траекторией* модели Леонтьева. Траектория, на которой целевая функция (5.9) достигает наибольшего значения, называется *оптимальной*.

Вектор $Ax(t)$ описывает затраты в период $[t-1, t]$. Вектор $x(t-1)$ - выпуск продукции в период $[t-2, t-1]$. Тогда смысл неравенства $Ax(t) \leq x(t-1)$ очевиден. Затраты в каждый период времени не должны превышать выпуск продукции в предыдущий период. Задача (4.9), (4.10) есть задача линейного программирования, хоть и несколько своеобразно записанная. Казалось бы, ничего особенного, но, как всегда, существуют моменты, не делающие её тривиальной. Перечислим самые очевидные из них.

1). Большая размерность, связанная не только с размерностью вектора $x(t) \in R^n$, но и с количеством периодов времени T.

2). Структура матрицы $A \geq 0$. Это и разложимость – неразложимость, и примитивность – импримитивность.

3). Параметрическая сущность вектора $q \in R^n$. Проблемы назначения целевого функционала, выбор которого определяет решение и, следовательно, направление развития моделируемой системы.

4). Предположения экономистов о специфическом характере поведения оптимальных траекторий в задачах типа (4.9), (4.10).

В 1950 - х годах Самуэльсон высказал гипотезу о том, что оптимальные в некотором смысле траектории сбалансированного роста экономики на промежуточных этапах перед достижением конечного состояния имеют тенденцию выходить на луч максимального сбалансированного роста. Чем больше интервалов времени T, отведенных для достижения конечной цели, тем дольше оптимальная траектория совпадает с таким лучём. Самуэльсон, Дорфман, Солоу сравнивают этот луч с магистралью в автодорожной сети. Если требуется проехать в ближайший город, то нужно двигаться по кратчайшей дороге, не выезжая на магистральную дорогу. Если же требуется проехать в достаточно отдалённый город, то оптимальный маршрут движения иной. Прежде всего требуется проехать до магистральной дороги, затем двигаться по ней столько, сколько это возможно, затем свернуть с магистрали на дорогу, ведущую в нужный город. И чем дальше расположен город в который едешь, тем дольше надо двигаться по магистрали. Самуэльсон считает, что эффективный долговременный экономический рост подобен такому плану движения. В связи с этой аналогией близость оптимальных траекторий к лучу максимального сбалансированного роста получила название принципа магистрали.

Формализуем это понятие. Введём в R^n функцию $\rho(x,y)$, положив для $x, y \in R^n, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$

$$\rho(x,y) = \|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\|.$$

Здесь $\|a\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$ - евклидова норма вектора $a \in R^n$. Из определения функции $\rho(x,y)$ следует, что $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны, но, вообще говоря, не равны друг другу. Но тогда функция $\rho(x,y)$ не является расстоянием между векторами x и y в обычном смысле евклидова расстояния между точками x и y. Выясним этот смысл. Если $x \in R^n$ – некоторый вектор, то вектор $\dfrac{x}{\|x\|}$ всегда лежит на сфере единичного радиуса с центром в нуле, а именно в той точке, где луч Ox пересекается с этой сферой, т.е. вектор $\dfrac{x}{\|x\|}$ есть проекция вектора x на сферу единичного радиуса. Тогда становится понятен и смысл функции $\rho(x,y)$. Она есть обычное евклидово расстояние между проекциями векторов x и y на сфере единичного радиуса в R^n. То есть, число $\rho(x,y)$ служит мерой углового расстояния между векторами x и y. В математике часто такие функции, которые не являются расстоянием (метрикой) в обычном смысле, но являются "почти расстоянием"называют квазиметрикой (квазирасстоянием). Отметим ещё одно свойство квазиметрики $\rho(x,y)$. Если $\alpha,\ \beta > 0$, то $\rho(\alpha x, \beta y) = \rho(x,y)$.

Определим множество

$$C_\varepsilon(x^*) = \{x \in R^n :\ \rho(x,x^*) < \varepsilon\}.$$

Геометрически, $C_\varepsilon(x^*)$ - неограниченный конус с заострённостью в нуле (вершина конуса находится в точке $0 \in R^n$) и содержащий луч Ox^* в середине. Множество $C_\varepsilon(x^*)$ называется конической ε – окрестностью вектора $x^* \in R^n$.

Определение 1. *Луч x^* называется магистралью для задачи (4.9), (4.10), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $T_1(\varepsilon)$, $T_2(\varepsilon)$ такие, что для любой оптимальной траектории $\{x(t)\}$, $i = \overline{1,T}$ задачи (4.9), (4.10) выполняется включение $x(t) \in C_\varepsilon(x^*)$ для всех t таких, что $T_1(\varepsilon) < t < T - T_2(\varepsilon)$.*

Определение 2. *Луч x^* называется слабой магистралью для задачи (4.9), (4.10), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $T(\varepsilon)$ такое, что для любой оптимальной траектории $\{x(t)\}$, $i = \overline{1,T}$ задачи (4.9), (4.10) включение $x(t) \in C_\varepsilon(x^*)$ нарушается не более чем для $T(\varepsilon)$ индексов t.*

Заметим, что числа $T_1(\varepsilon),\ T_2(\varepsilon),\ T(\varepsilon)$ в определениях 1 и 2 не зависят от длины периода планирования T.

В определении 1 требуется, чтобы оптимальная траектория нарушала ограничение $x(t) \in C_\varepsilon(x^*)$ разве что лишь в начале и в конце планового периода. В определении 2 накладывается ограничение на количество нарушений включения $x(t) \in C_\varepsilon(x^*)$. Ясно, что просто магистраль является и слабой магистралью. Достаточно положить

$$T(\varepsilon) = T_1(\varepsilon) + T_2(\varepsilon).$$

Обратное, понятно, не верно. Утверждения о справедливости принципа магистрали по традиции называют теоремами о магистрали. Исследования, начало которым положил Самуэльсон, показали, что в общем случае для обеспечения справедливости принципа магистрали надо наложить достаточно сильные ограничения на модель системы. Причём многие из этих ограничений носят часто сугубо технический характер, не имеют адекватной экономической интерпретации и необходимы именно для доказательства математической теоремы о магистрали. Однако, для задачи (4.9), (4.10), пожалуй одной из самых простых, эти условия достаточно хорошо трактуются экономически, хотя и выглядят несколько ограничительно для сути экономической задачи.

Теорема 1 (Моришима). *Пусть матрица $A \geq 0$ неразложима и примитивна. Векторы $x_0 > 0$, $q > 0$. Тогда вектор Фробениуса – Перрона x_A матрицы A является магистралью задачи (4.9), (4.10).*

4.8 Обобщённая модель Леонтьева

В рассмотренной выше модели Леонтьева предполагалось, что каждая отрасль имеет в своём распоряжении только один технологический способ производства своего продукта. Этому способу соотвествует только один столбец в технологической матрице $A \geq 0$. Можно же рассмотреть и более общий случай, когда каждый продукт может производиться с помощью нескольких технологических способов. Определим соотвествующую модель.

Пусть в производственной системе имеется n типов товаров и m технологических процессов ($m \geq n$), каждый из которых выпускает один товар. Множество технологических процессов $M = \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ разбивается n непересекающихся подмножеств $M_k,\ k = \overline{1,n}$ таким образом, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} M_k = M$.

Технологический процесс $j \in M_k$ выпускает продукт k. Обозначим через A^0 прямоугольную $(n \times m)$ матрицу технологических коэффициентов. Элементы этой матрицы a_{ij} означают затраты продукта i необходимые для выпуска продукта k с помощью технологического способа $j \in M_k$. Поскольку технологических способов не меньше числа продуктов, то определим некий аналог единичной матрицы, моделирующей выпуск продукции в данном случае. Обозначим через E^0 $--$ $(n \times m)$–матрицу с элементами

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in M_i, \\ 0, & j \notin M_i. \end{cases}$$

Пусть $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)^T$ – вектор интенсивностей всех технологических способов. Тогда A^0x – вектор затрат на производственные нужды, E^0x – вектор валового выпуска. Отметим, что в отличие от обычной модели Леонтьева, появляется различие между интенсивностью функционирования производственного процесса и валовым выпуском некоторого товара. Пусть $c = (c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)^T$ – вектор конечного спроса на продукты. Тогда обобщённая модель Леонтьева имеет вид:

$$E^0x - A^0x = c, \tag{4.11}$$

где все параметры модели неотрицательны: $A^0 \geq 0,\ c \geq 0,\ x \geq 0$. Как и для обычной модели Леонтьва, ставится задача о нахождении для произвольного наперёд заданного вектора конечного спроса $c \geq 0$ неотрицательного вектора интенсивностей технологических способов $x \geq 0$, удовлетворяющего системе линейных уравнений (4.11). Если такой вектор $x \geq 0$ существует, то обобщённая модель Леонтьева называется продуктивной. Формально, система уравнений (4.11) отличается от системы (3.2) тем, что матрица $E^0 - A^0$ при переменных x прямоугольная, причём число столбцов $m \geq n$, а не квадратная, как в обычной модели Леонтьева. Данный факт позволяет более точно учесть структуру производства, т.к. один и тот же продукт может призводиться существенно различными способами.

Будем считать, что обобщённая модель Леонтьева (4.11) продуктивна. Для этого достаточно предположить, что существует набор из n таких технологических способов, по одному для каждого продукта, что отвечающая этому набору обычная модель Леонтьева является продуктивной.

Определение 1. *Подмоделью обобщённой модели Леонтьева (4.11) будем называть подмножество технологических способов*

$$v = \{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_n\},$$

где $j_k \in M_k,\ k = \overline{1,n}.$

Подматрицу матрицы A^0, составленную из столбцов с номерами из множества v будем обозначать A_v. Матрица A_v задаёт обычную модель Леонтьева. Если в обощённой модели Леонтьева существует продуктивная подмодель v, то, очевидно, будет продуктивна и обобщённая модель. Обозначим через $x_v \in R^n$ подвектор вектора $x \in R^m$ составленный из компонент с индексами из v.

Сопоставим каждой отрасли $j \in M$ число l_j – трудовые затраты отрасли j при единичной интенсивности функционирования технологического процесса этой отрасли. Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$l^T x \to \min, \tag{4.12}$$

$$(E^0 - A^0)x \geq c, \quad x \geq 0. \tag{4.13}$$

То есть, необходимо обеспечить удовлетворение конечного спроса $c \geq 0$ с минимальными трудовыми затратами. Пусть $l_v \in R^n$ – подвектор вектора $l \in R^n$ индексы компонент которого содержатся в наборе v.

Теорема 1 (Самуэльсон). *Существует подмодель v обобщённой модели Леонтьева (4.11) такая, что среди решений задачи (4.12), (4.13) для произвольного конечного спроса $c > 0$ найдётся вектор $x \geq 0$ у которого $x_j = 0,\ j \notin v,\ x_j > 0,\ j \in v.$*

Доказательство. Пусть x^* – какое – нибудь решение задачи (4.12), (4.13). Предположим, что количество нулевых компонент вектора x^* строго больше n. Обозначим через

$$\tau = \{i: \ x_i^* > 0\},$$

$|\tau|$ – число элементов множества τ, x_τ^* – подвектор вектора x^*, отвечающий набору τ. Матрицы $A_\tau,\ E_\tau$ – подматрицы матриц $A^0,\ E^0$, составленные из столбцов с индексами содержащимися в τ.

Так как $|\tau| > n$, то матрица $E_\tau - A_\tau$ – прямоугольная, размерности $n \times |\tau|$. Тогда существует вектор $z_\tau \in R^{|\tau|}$ ортогональный строкам матрицы $E_\tau - A_\tau$:

$$(E_\tau - A_\tau)z_\tau = 0 \in R^n.$$

Определим вектор

$$u_\tau = x_\tau^* + \delta z_\tau, \quad \delta \in R^1.$$

Поскольку вектор $x^*_\tau > 0$ по его определению, то можно подобрать $\delta \in R^1$ таким, чтобы у вектора u_τ была хотя бы одна нулевая компонента, а все остальные положительные. Рассмотрим выражение:

$$(E_\tau - A_\tau)x^*_\tau = (E_\tau - A_\tau)(u_\tau - \delta z_\tau) =$$

$$= (E_\tau - A_\tau)u_\tau - \delta(E_\tau - A_\tau)z_\tau = (E_\tau - A_\tau)u_\tau. \qquad (4.14)$$

Обозначим через $u \in R^m$ вектор, построенный следующим образом. На месте нулевых компонент вектора x^* стоят нулевые компоненты вектора u, если же компоненты $i \in \tau$, то там располагаются компоненты вектора u_τ в соотвествующем порядке.

Из соотношения (4.14) следует, что вектор u является допустимым для задачи (4.12), (4.13). Покажем, что он является оптимальным. Выпишем задачу, двойственную к задаче (4.12), (4.13):

$$c^T p \to \max,$$

$$p^T(E^0 - A^0) \leq l, \quad p \geq 0.$$

Обозначим через p^* решение двойственной задачи. Тогда по теореме двойственности $l^T x^* = c^T p^*$. Используя множество τ и введённые обозначения, можно записать:

$$l^T x^* = l^T_\tau x^*_\tau,$$

где вектор l_τ строится по тем же правилам, что и вектор x_τ.

Из условия $x^*_i > 0,\ i \in \tau$ и условия дополняющей нежёсткости следует:

$$p^{*T}(E_\tau - A_\tau) = l^T_*.$$

Тогда имеем следующую цепочку равенств:

$$l^T x^* = c^T p^* = l_\tau^T x_\tau^* = p^{*T}(E_\tau - A_\tau) x_\tau^* =$$

$$= p^{*T}(E_\tau - A_\tau)(u_\tau - \delta z_\tau) = p^{*T}(E_\tau - A_\tau) u_\tau = l_\tau^T u_\tau = l^T u.$$

Отсюда и следует оптимальность построенного вектора u. Таким образом, указана процедура, позволяющая в решении задачи (4.12), (4.13) уменьшить число ненулевых компонент хотя бы на единицу. Повторяя указанную процедуру не более $|\tau| - n$ раз можно добиться того, что у решения задачи (4.12), (4.13) число ненулевых компонент не больше, чем n.

С другой стороны, так как вектор $c > 0$, а обощённая модель Леонтьева продуктивна, то из соотношения (4.13) следует, что в решении этой задачи число ненулевых компонент не меньше, чем n:

$$E^0 x^* \geq E^0 x^* - A^0 x^* \geq c > 0,$$

или

$$(E^0 x^*)_i = \sum_{j \in M_i} x_j^* \geq c_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

То есть для каждого i существует индекс $j_i \in M_i$ такой, что $x_{j_i}^* > 0$, причём этот индекс единственный.

Таким образом, существует подмодель v обобщённой модели Леонтьева с указанными свойствами, а именно:

$$v = (j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_n), \quad j_i \in M_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$x_i^* > 0, \quad i \in v; \quad x_i^* = 0, \quad i \notin v.$$

Теорема доказана.

Следовательно, если требуется экономить трудовые ресурсы, удовлетворяя наперёд заданный спрос $c > 0$, то для производства каждая отрасль может использовать всего лишь один из всех возможных технологический процесс. Теорему Самуэльсона часто называют теоремой о замещениии и понятно почему.

Выясним, чем же ещё подмодель, определяемая теоремой Самуэльсона, выделяется из остальных подмоделей. Пусть v – подмодель определяемая теоремой Самуэльсона, w – произвольная продуктивная подмодель:

$$w = (s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n),\quad s_i \in M_i,\quad i = \overline{1,n}.$$

$A_w,\ A_v,\ l_w,\ l_v,\ x_w,\ x_v,\ p_w,\ p_v$ – соответствующие подматрицы и подвекторы, отвечающие подмоделям w и v. Обозначим

$$l_v^{*T} = l_v^T(E - A_v)^{-1},\qquad l_w^{*T} = l_w^T(E - A_w)^{-1}.$$

Векторы $l_v^{*T},\ l_w^{*T}$ – называются *векторами полных трудовых затрат* подмоделей v и w, соответственно. Поскольку обе подмодели v и w продуктивны, то матрицы $(E - A_v)^{-1},\quad (E - A_w)^{-1}$ неотрицательно обратимы и, следовательно, определение полных трудовых затрат корректно. Пусть вектор конечного спроса $c > 0$.

Теорема 2. *Для любой продуктивной подмодели w модели Леонтьева имеет место неравенство: $l_v^{*T} \le l_w^{*T}$.*

Доказательство. Рассмотрим две задачи линейного программирования:

$$\begin{array}{c} l_v^T x_v \to \min, \\ x_v - A_v x_v \ge c,\quad x_v \ge 0. \end{array}. \tag{4.15}$$

$$\begin{array}{c} l_w^T x_w \to \min, \\ x_w - A_w x_w \ge c,\quad x_w \ge 0. \end{array}. \tag{4.16}$$

Так как вектор $c > 0$, то из теоремы Самуэльсона следует, что решение задачи (4.15) – вектор $x_v^*>0$. Выпишем задачу, двойственную к задаче (4.15):

$$\begin{gathered} c^T p \to \max, \\ p^T(E - A_v) \le l_v^T, \quad p \ge 0. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Тогда из условия дополняющей нежёсткости следует, что если p_v – решение задачи (4.17), то

$$p_v^T(E - A_v) = l_v^T$$

или

$$p_v^T = l_v^T(E - A_v)^{-1} = l_v^{*T}.$$

Аналогичный вывод можем сделать и для задачи (4.16) и двойственной к ней:

$$p_w^T = l_w^T(E - A_w)^{-1} = l_w^{*T},$$

где p_w – решение задачи, двойственной к (4.16). Из теоремы двойственности следуют два равенства:

$$l_v^T x_v^* = c^T p_v, \quad l_w^T x_w^* = c^T p_w.$$

Здесь $x_w^* > 0$ – решение задачи (4.16). Воспользовавшись теоремой Самуэльсона, получаем:

$$l_v^T x_v^* \le l_w^T x_w^*.$$

Отсюда следует, что

$$c^T p_v \le c^T p_w.$$

Или, с учётом определения векторов полных трудовых затрат,

$$c^T l_v^* \le c^T l_w^*.$$

В силу произвольности вектора $c > 0$, получаем, что

$$l_v^* \le l_w^*.$$

Теорема доказана.

Таким образом, вектор полных трудовых затрат l_v^*, определяемый из теоремы Самуэльсона, по всем координатам не превосходит вектора полных трудовых затрат любой другой продуктивной подмодели.

Глава 5

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

5.1 Контрольные вопросы

1. Какое математическое соотношение называется моделью Леонтьева?

2. Каков экономический смысл элементов технологической матрицы?

3. Какая модель Леонтьева называется продуктивной?

4. Какая матрица называется неотрицательно обратимой?

5. Какая связь между неотрицательной обратимостью некоторой матрицы (какой?) и продуктивностью модели Леонтьева?

6. В чём суть теоремы Хокинса – Саймона?

7. Какое множество называется изолированным подмножеством?

8. Какая неотрицательная матрица называется неразложимой (разложимой)?

9. К какому виду можно всегда привести разложимую матрицу?

10. Каков экономический смысл разложимости (неразложимости) модели Леонтьева?

11. Какое из свойств неразложимой матрицы можно принять за определение неразложимости?

12. В чём суть теоремы Фробениуса – Перрона?

13. Что такое доминирующее собственное значение матрицы?

14. Какова оценка числа Фробениуса – Перрона?

15. Какова связь между продуктивностью модели Леонтьева и её числом Фробениуса – Перрона?

16. Какая матрица называется матрицей полных затрат?

17. Каковы достаточные условия продуктивности модели Леонтьева?

18. Какая математическая модель называется моделью равновесных цен?

19. Как определяется эластичность выпуска некоторого продукта по отношению к спросу на другой продукт?

20. Каков экономический смысл коэффициента эластичности?

21. Какова оценка коэффициента эластичности?

22. Какая матрица называется устойчивой?

23. Какая неразложимая матрица называется импримитивной?

24. К какому виду всегда можно привести импримитивную матрицу?

25. Каков критерий устойчивости неразложимой матрицы?

26. Каков критерий примитивности неразложимой матрицы?

27. Что такое индекс примитивности?

28. Каковы оценки индекса примитивности?

29. Может ли неразложимая матрица иметь разложимую степень?

30. Являются ли степени примитивной матрицы примитивными?

31. Какая идея заложена в принципе магистрали?

32. Что такое угловое расстояние между векторами?

33. Что такое коническая ε – окрестность вектора?

34. Каково определение магистрали?

35. Каково определение слабой магистрали?

36. В чём суть теоремы Моришимы?

37. За счёт чего достигается обобщение модели Леонтьева?

38. Какая математическая модель называется обобщённой моделью Леонтьева?

39. Что такое подмодель обобщённой модели Леонтьева?

40. В чём суть теоремы Самуэльсона?

41. Что такое векторы трудовых затрат и полных трудовых затрат в обобщённой модели Леонтьева?

42. Как соотносятся между собой векторы полных трудовых затрат произвольной продуктивной подмодели обобщённой модели Леонтьева и подмодели, определяемой теоремой Самуэльсона?

5.2 Контрольные задания

1. Продуктивна ли матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}?$$

2. При каких a продуктивна матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 1-a \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}?$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти все коэффициенты эластичности E_{ij}.

4.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При каких a все коэффициенты эластичности $E_{ij} \leq 1$?

5.

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

На сколько процентов изменится выпуск продукции при увеличении спроса на второй продукт в два раза и уменьшении спроса на первый продукт в два раза при неизменном спросе на третий продукт?

6.

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

На сколько процентов изменятся равновесные цены, при уменьшении нормы добавленной стоимости в первой отрасли в три раза, уменьшении этой же нормы во второй отрасли в два раза и увеличении нормы добавленной стоимости в третьей отрасли в три раза?

7. Является ли матрица $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ примитивной?

8. Технологическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Чему равны вторичные издержки при производстве вектора конечного потребления $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

9. $A \geq 0$ - неразложимая матрица. Будет ли матрица A^2 неразложимой?

10. Является ли матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$ примитивной?

11. Является ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.6 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

неразложимой?

12. Найти число и вектор Фробениуса - Перрона матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Влияет ли выпуск третьего продукта на выпуск первого продукта?

Литература

[1] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. - М.:Наука,1984.

[2] Беллман Р. Введение в теорию матриц. - М.:Наука,1976.

[3] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.:Физматлит,2004.

[4] Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. - М.:Изд-во иностр. литры,1963.

[5] Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. - М.:Наука,1966.

[6] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. - М.:Наука,1970.

[7] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств.- М.:Наука,1972.

[8] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.:Мир,1972.

[9] Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике, часть 1. - М.:Финансы и статистика,2000.

[10] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. - М.:Наука,1972.

[11] Хорн Р.,Джонсон Ч. Матричный анализ. - М.:Мир,1989.

[12] Шевцов Г.С. Линейная алгебра. - М.:Гардарики,1999.

[13] Леонтьев В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. - М.:Политиздат,1990.

[14] Будущее мировой экономики: Доклад группы экспертов ООН во главе с В. Леонтьевым. - М.:Междунар. отношения,1979.

[15] Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. - М.:Наука,1979.

[16] Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.:Айрис Пресс,2002.

[17] Громенко В.В. Математическая экономика. - М.:МЭСИ,2004.

[18] Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.:Наука,1973.

[19] Колемаев В.А. Математическая экономика. - М.:ЮНИТИ-ДАНА,2005.

[20] Красс И.А. Математические модели экономической динамики. - М.:Советское радио,1976.

[21] Сидоренко Г.В. Линейная алгебра и линейные экономические модели. - Иркутск: БГУЭП, 2009.

Оглавление

Учебное издание

СИДОРЕНКО ГЕННАДИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

Математическая экономика

(производственные функции и модель Леонтьева

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Компьютерный набор: Г.В. Сидоренко

ИД № 06318 от 26.11.01.

Подписано к пользованию 05.12.16.

Издательство Байкальского государственного университета. 664003, г.

Иркутск, ул. Ленина, 11.

http://bgu.ru.